

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ BẬC NHẤT

Nhắc lại kiến thức về hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị số tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x .

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ.

Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là hàm hằng. Chẳng hạn $y = 2$ là một hàm hằng, đồ thị của hàm số này là đường thẳng vuông góc với trục tung, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$. Với x_1, x_2 bất kì thuộc $\mathbb{R}$:

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta nói hàm số đó đồng biến trên $\mathbb{R}$,

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì ta nói hàm số đó nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 5$ (a, b, c là hằng số).

Cho biết $f(-3) = 208$. Tính $f(3)$.

Lời giải

Ta có $f(-3) = a(-3)^5 + b(-3)^3 + c(-3) - 5$;

$$f(3) = a.3^5 + b.3^3 + c.3 - 5$$

Nên $f(-3) + f(3) = -10$. Do đó $208 + f(3) = -10$.

Vậy $f(3) = -10 - 208 = -218$.

Ví dụ 2. (Trích đề thi HSG huyện Bình Giang năm 2012-2013)

Tìm m để hàm số bậc nhất $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ là hàm số nghịch biến.

Lời giải

Để hàm số $y = \frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3}x - 2011$ nghịch biến thì $\frac{m^2 - 2013m + 2012}{m^2 - 2\sqrt{2}m + 3} < 0$ (1).

$$m^2 - 2\sqrt{2}m + 3 = (m - \sqrt{2})^2 + 1 > 0 \forall m$$

$$(1) \Leftrightarrow m^2 - 2013m + 2012 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 2012) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-2012 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2012 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ m-2012 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2012 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 < m < 2012$$

Vậy khi $1 < m < 2012$ thì hàm số nghịch biến.

Ví dụ 3. (Trích đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng năm 2010-2011)

Cho hàm số $y = f(x) = (3m^2 - 7m + 5)x - 2011$ (*). Chứng minh hàm số (*) luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3m^2 - 7m + 5 &= 3\left(m^2 - \frac{7}{3}m + \frac{5}{3}\right) \\ &= 3\left[\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{60}{36}\right] \\ &= 3\left[\left(m - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right] > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ với mọi m

Ví dụ 4. Với giá trị nào của m thì hàm số sau là hàm số bậc nhất:

$$\text{a) } y = \sqrt{\frac{3-4m}{2}}x - \sqrt{5}$$

$$\text{b) } y = \frac{3}{m^2-4}x - \frac{1}{2}$$

Lời giải

a) Để hàm số là hàm số bậc nhất thì:

$$\sqrt{\frac{3-4m}{2}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-4m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{4}$$

Vậy để hàm số là hàm số bậc nhất thì $m \neq \frac{3}{4}$

b) Để hàm số là hàm số bậc nhất thì $m \neq 2$ và $m \neq -2$.

CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ $y = ax^2$

Tóm tắt lý thuyết:

Hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) xác định với mọi số thực x .

Đồ thị của hàm số $y = ax$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

Trên tập hợp số thực, hàm số $y = ax$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng toạ độ, cho các điểm A, B, C có toạ độ $A(0; 4), B(3; 4), C(3; 0)$.

Hãy tìm hệ số a sao cho đường thẳng $y = ax$ chia hình chữ nhật $OABC$ thành hai phần, trong đó diện tích phần chứa điểm A gấp đôi diện tích phần chứa điểm C .

Lời giải

(h.2) Đường thẳng $y = ax$ phải cắt cạnh BC

của hình chữ nhật $OABC$, gọi giao điểm đó là E có toạ độ $(3; 3a)$.

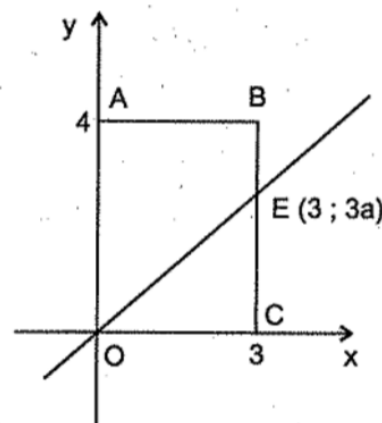
$$S_{OABC} = OA \cdot OC = 4 \cdot 3 = 12.$$

$$S_{OCE} = \frac{1}{3} S_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

$$CE = 2 \cdot S_{OCE} : OC = 2 \cdot 4 : 3 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Từ } 3a = \frac{8}{3} \text{ được } a = \frac{8}{9}.$$

Đường thẳng phải tìm là $y = \frac{8}{9}x$.



Hình 2

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Dùng đồ thị tìm giá trị nhỏ nhất của y , giá trị lớn nhất của y .

Lời giải

a) $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| - |x-1|$. Lập bảng xét dấu

x	-1	1
$x+1$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$

Với $x \leq -1$ thì $y = (-x-1) - (1-x) = -2$.

Với $-1 < x < 1$ thì $y = (x+1) - (1-x) = 2x$.

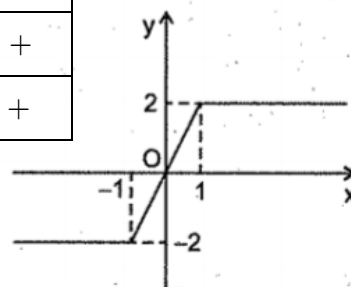
Với $x \geq 1$ thì $y = (x+1) - (x-1) = 2$.

Đồ thị của hàm số được vẽ trên hình 3.

b) Trên đồ thị, ta thấy:

$$\min y = -2 \Leftrightarrow x \leq -1;$$

$$\max y = 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$



Hình 3

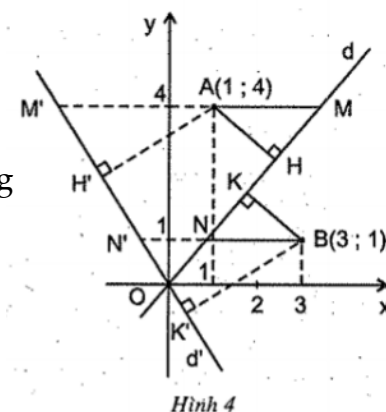
Ví dụ 3. Cho các điểm $A(1;4)$ và $B(3;1)$. Xác định đường thẳng $y = ax$ sao cho A và B nằm về hai phía của đường thẳng và cách đều đường thẳng đó.

Lời giải

Kí hiệu đường thẳng phải tìm là d .

Gọi AH và BK là khoảng cách từ A đến B đến đường thẳng d . Đường thẳng đi qua A và song song với Ox cắt d tại điểm $M\left(\frac{4}{a}; 4\right)$. Đường thẳng đi qua B

và song song với Ox cắt d tại điểm $N\left(\frac{1}{a}; 1\right)$.



Ta có $AH = BK \Leftrightarrow AM = NB$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{a} - 1 = 3 - \frac{1}{a} \quad (1)$$

Giải (1) ta được $a = \frac{5}{4}$, khi đó đường thẳng d phải tìm là $y = \frac{5}{4}x$.

Chú ý:

a) Nếu đề bài không có điều kiện “ A và B nằm về hai phía của đường thẳng $y = ax$ ” thì thay cho (1) ta phải viết $\left|\frac{4}{a} - 1\right| = \left|3 - \frac{1}{a}\right|$. Khi đó ngoài (1), ta còn phải giải

$\frac{4}{a} - 1 = \frac{1}{a} - 3$. Trường hợp này cho kết quả $a = -\frac{3}{2}$, các điểm A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x$ và cách đều đường thẳng đó (đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x$ là đường thẳng d' trên hình 4).

b) Nếu sử dụng công thức tính tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB thì đường thẳng $y = ax$ trong Ví dụ 21 đi qua điểm $M(2; 2,5)$, ta tìm được $a = \frac{2,5}{2} = \frac{5}{4}$.

CHỦ ĐỀ 3: HÀM SỐ BẬC NHẤT $Y = AX + B$

Tóm tắt lý thuyết:

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a và b là các số thực xác định, $a \neq 0$.

Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) xác định với mọi số thực x .

Trên tập hợp số thực, hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$.

Đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ.

Hàm số $y = ax$ là trường hợp đặc biệt của hàm số $y = ax + b$ khi $b = 0$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Chứng minh rằng nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua A và B thì

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Lời giải

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_1; y_1)$ nên $y_1 = ax_1 + b$, suy ra

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad (1)$$

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $B(x_2; y_2)$ nên $y_2 = ax_2 + b$, suy ra:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ do đó $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng

$$y = mx + m - 1 \quad (m \text{ là tham số}). \quad (1)$$

- Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m .
- Tính giá trị của m để đường thẳng (1) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

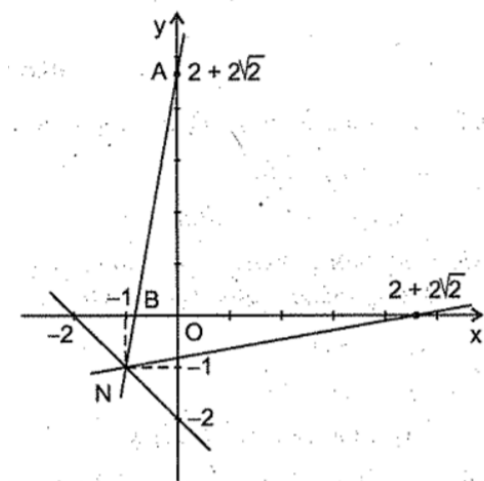
Lời giải

a) Điều kiện để đường thẳng

(1) đi qua điểm cố định $N(x_0; y_0)$ với mọi m là:

$$\begin{aligned} y_0 &= mx_0 + m - 1 = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) &= 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các đường thẳng (1) đi qua điểm cố định $N(-1; -1)$.



Hình 5

- Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung. Với $x = 0$ thì $y = m - 1$, do đó $OA = |m - 1|$.

Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành. Với $y = 0$ thì $x = \frac{1-m}{m}$ nên

$$OB = \left| \frac{1-m}{m} \right|.$$

$$S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA \cdot OB}{2} = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2}{|m|} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 4m(2) \\ m^2 - 2m + 1 = -4m(3) \end{cases}$$

Giải (2) ta có $m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 8$

$$\Leftrightarrow |m-3| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Giải (3) ta có $m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

Có ba đường thẳng đi qua N tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2:

Với $m = 3 + 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3 + 2\sqrt{2})x + (2 + 2\sqrt{2})$.

Với $m = 3 - 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3 - 2\sqrt{2})x + (2 - 2\sqrt{2})$.

Với $m = -1$, ta có đường thẳng $y = -x - 2$.

CHỦ ĐỀ 4: HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $Y = AX + B$

Tóm tắt lý thuyết:

Xét hai đường thẳng d và d' theo thứ tự có phương trình là $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$). Ta có:

$$d \parallel d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'$$

$$d \text{ trùng } d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'.$$

$$d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'.$$

$$d \perp d' \Leftrightarrow aa' = -1.$$

Xét đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Gọi A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox , T là điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương. Ta gọi góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox là góc tạo bởi tia AT và tia Ax . Đặt góc đó là α , nếu $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\operatorname{tg} \alpha = a$, nếu $a < 0$ thì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -a$. Cho biết a , ta tính được α , hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Tìm các số dương m, n sao cho hệ số góc của đường thẳng $y = mx$ gấp bốn hệ số góc của đường thẳng $y = nx$, góc tạo bởi đường thẳng $y = mx$ với trục Ox gấp đôi góc tạo bởi đường thẳng $y = nx$ với trục Ox .

Lời giải

Qua điểm $C(1;0)$ kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành, cắt các đường thẳng $y = nx, y = mx$ theo thứ tự tại A, B . Ta có $A(1; n), B(1; m)$.

Do $m = 4n$ nên $BC = 4n, AB = 3n$.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác OBC , ta có:

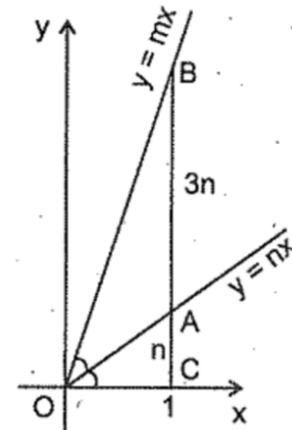
$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{3n}{n} = \frac{OB}{1} \Rightarrow OB = 3.$$

Theo định lý Py-ta-go trong tam giác OBC , vuông tại C có:

$$BC^2 = OB^2 - OC^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{8} \Rightarrow m = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$n = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Hình 6

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng d và d' xác định bởi $y = ax$ ($a \neq 0$) và $y = a'x$ ($a' \neq 0$). Chứng minh rằng điều kiện để các đường thẳng d và d' vuông góc với nhau là $aa' = -1$.

Lời giải

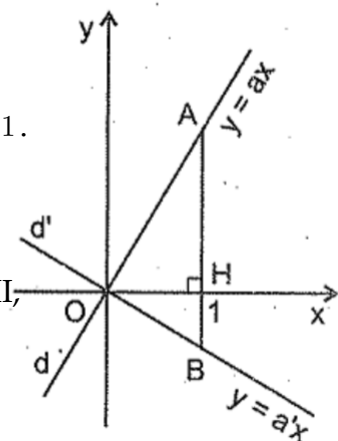
Ta thấy khi $d \perp d'$ thì trong hai đường thẳng d và d' , có một đường (giả sử là d) nằm trong góc vuông phần tư I và III, đường kia (là d') nằm trong góc vuông phần tư II và IV, khi đó $a > 0$ và $a' < 0$.

Qua điểm $H(1;0)$, kẻ đường thẳng vuông góc với Ox , cắt d và d' theo thứ tự ở A và B , ta có $HA = |a| = a, HB = |a'| = -a$.

Chú ý rằng H nằm giữa A và B nên điều kiện để tam giác OAB vuông tại O là

$$HA.HB = OH^2 \Leftrightarrow a(-a') = 1 \Leftrightarrow aa' = -1.$$

Chú ý: Ta biết rằng hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ vuông góc với nhau. Do đó từ bài toán trên suy ra: Điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ($a \neq 0, a' \neq 0$) vuông góc với nhau là $aa' = -1$.



Hình 7

CHỦ ĐỀ 4: HÀM SỐ $y = ax^2$ **Tóm tắt lý thuyết:**

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi x thuộc R .

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến với $x < 0$, đồng biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến với $x < 0$, nghịch biến với $x > 0$, bằng 0 với $x = 0$.

Đồ thị của hàm số là một parabol; đi qua gốc toạ độ và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1.

a) Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0;1)$ và đường thẳng d có phương trình $y = -1$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng d .

b) Cho điểm $A(0;a)$, gọi d là đường thẳng có phương trình $y = -a$. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm $M(x;y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là một parabol.

Lời giải

a) Ta luôn luôn có

$$MH = y + 1. \quad (1)$$

Để tính MA , ta kẻ $MI \perp Oy$.

Ta có $MI = |x|$, $AI = |y - 1|$ nên

$$\begin{aligned} MA^2 &= MI^2 + AI^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Do $y = \frac{1}{4}x^2$ nên thay x^2 bởi $4y$ ta được

$$MA^2 = 4y + y^2 - 2y + 1 = (y + 1)^2$$

$$\text{Do đó } MA = |y + 1| = y + 1 \text{ (do } y \geq 0). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $MA = MH$.

b) (h.5 ứng với $a > 0$) Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm $M(x;y)$ và $A(0;a)$ ta có

$$\begin{aligned} MA^2 &= (x - 0)^2 + (y - a)^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2ay + a^2. \end{aligned}$$

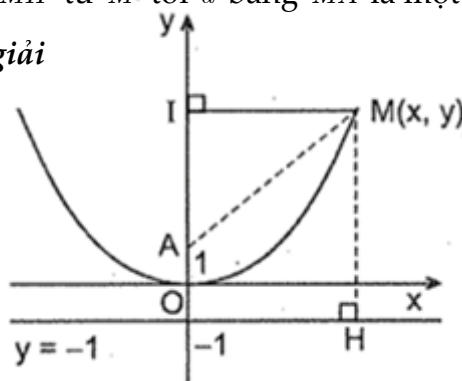
Ta lại có $MH = |y + a|$ nên

$$MH^2 = (y + a)^2 = y^2 + 2ay + a^2.$$

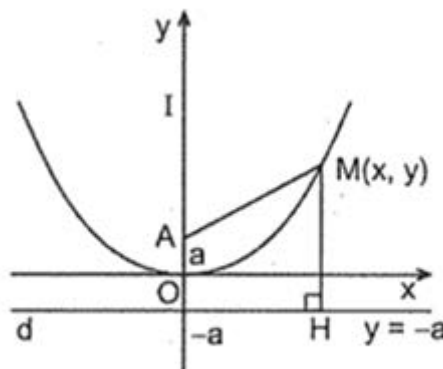
$$MA^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ay \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a}x^2.$$



Hình 4



Hình 5

Do đó quỹ tích của M là parabol $y = \frac{1}{4a}x^2$.

Chú ý: Tổng quát, cho một điểm A và đường thẳng d không đi qua A , quỹ tích các điểm M sao cho khoảng cách MA bằng khoảng cách từ M đến d là một parabol. Khi đó điểm A gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng d gọi là *đường chuẩn* của parabol.

Ví dụ 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2x + 3$

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Lời giải

1. Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt

Hoành độ giao điểm đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình

$$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ có } a - b + c = 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

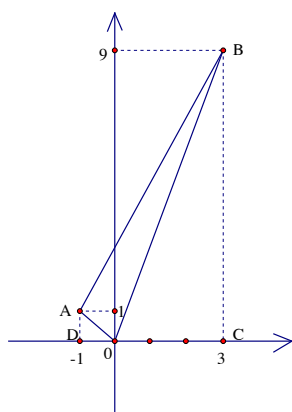
$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{Với } x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A(-1; 1)$$

$$\text{Với } x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3^2 = 9 \Rightarrow B(3; 9)$$

Vậy (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt A và B

2. Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Ta biểu diễn các điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ:



$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot DC = \frac{1 + 9}{2} \cdot 4 = 20$$

$$S_{BOC} = \frac{BC \cdot CO}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5$$

$$S_{AOD} = \frac{AD \cdot DO}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5$$

Theo công thức cộng diện tích ta có:

$$S_{(ABC)} = S_{(ABCD)} - S_{(BCO)} - S_{(ADO)} = 20 - 13,5 - 0,5 = 6 \quad (\text{đvdt})$$

B/ BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: (Trích đề Chuyên Đà Nẵng năm học 2019-2020)

Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và điểm $A(2;2)$. Gọi d_m là đường thẳng qua A có hệ số góc m . Tìm tất cả các giá trị của m để d_m cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B , đồng thời cắt trục Ox tại điểm C sao cho $AB = 3AC$.

Bài 2: (Trích đề Chuyên Điện Biên năm học 2019-2020)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = 2mx + m + 2$ (m là tham số) và parabol $(P): y = 2x^2$. Chứng minh với mọi giá trị của m thì d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m sao cho $x_1^2 - 6x_2^2 - x_1x_2 = 0$.

Bài 3: (Trích đề Chuyên Hưng Yên năm học 2019-2020)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = \frac{-1}{2020}x + \frac{3}{2020}$ và Parabol $(P): y = 2x^2$. Biết đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm B và C . Tìm tọa độ điểm A trên trục hoành để $|AB - AC|$ lớn nhất.

Bài 4: (Trích đề Chuyên Quảng Ninh năm học 2019-2020)

Cho trước p là số nguyên tố. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy hai điểm $A(p^8;0)$ và $B(p^9;0)$ thuộc trục Ox . Có bao nhiêu tứ giác $ABCD$ nội tiếp sao cho các điểm C, D thuộc trục Oy và đều có tung độ là các số nguyên dương.

Bài 5: (Trích đề Chuyên Quảng Nam năm học 2019-2020)

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 3$.

Bài 6: (Trích đề Chuyên Quảng Bình năm học 2019-2020)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k .

a) Chứng minh rằng đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k .

b) Chứng minh $\triangle OAB$ là tam giác vuông với mọi giá trị k (O là gốc tọa độ).

Bài 7: (Trích đề Chuyên Cần Thơ năm học 2019-2020)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y = m^2x - m^4 + 2$ và $(d_2): y = \frac{m^2}{m^2 + 1}x + 2$ (m là tham số thực khác 0). Tìm tất cả giá trị của tham số m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm A duy nhất sao cho diện tích của hình thang ABHK bằng $\frac{15}{2}$. Biết $B(-1; 2)$ và hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành.

Bài 8: (Trích đề Chuyên Thừa Thiên Huế năm học 2019-2020)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A < x_B$) là các giao điểm của (P) và (d) , $C(x_C; y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A < x_C < x_B$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Bài 9: (Trích đề Chuyên Quảng Ngãi năm học 2019-2020)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 1$ và $(d'): x + (m+2)y = m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Bài 10: (Trích đề Chuyên Bắc Ninh năm học 2019-2020)

Cho hai hàm số $y = x^2$ và $y = (m-1)x - 1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là (P) và d . Tìm m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3)$.

Bài 11: (Trích đề Chuyên Bình Dương năm học 2019-2020)

Cho parabol $(P): y = 2ax^2$ ($a > 0$) và đường thẳng $d: y = 4x - 2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N sao cho $K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12: (Trích đề Chuyên Tiền Giang năm học 2019-2020)

Cho parabol $(P): y = 2x^2$, các đường thẳng $(d_1): y = -\frac{1}{4}x$. Viết phương trình đường thẳng (d_2) , biết d_2 vuông góc với d_1 và d_2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\sqrt{5}AB = \sqrt{17}OI$, với I là trung điểm của đoạn AB.

Bài 13: (Trích đề Chuyên Khánh Hòa năm học 2019-2020)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $(P) y = x^2$ và đường thẳng $(d) y = 2mx + 2m + 3$

a/ Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b/ Gọi y_1, y_2 lần lượt là tung độ các giao điểm của đường thẳng (d) và (P). Tìm tất cả các giá trị m để $y_1 + y_2 \leq 5$.

Bài 14: (Trích đề Chuyên Gia Lai năm học 2019-2020)

Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m - 2$, m là tham số. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 15: (Trích đề Chuyên Kon Tum năm học 2019-2020)

Cho parapol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + m^2 + 1$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parapol (P) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ sao cho

$$\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{-38}{5}.$$

Bài 16: (Trích đề Chuyên An Giang năm học 2019-2020)

Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P).

a) Xác định hệ số a biết đồ thị (P) đi qua điểm $A(\sqrt{5}; \sqrt{50})$. Vẽ đồ thị hàm số ứng với a vừa tìm được.

b) Với giá trị a vừa tìm ở trên, cho biết điểm $M(m; n)$ thuộc đồ thị (P). Hỏi điểm $N(n; m)$ có thuộc đồ thị (P) được hay không? Tìm điểm đó nếu có (m, n là hai số khác 0).

Bài 17: (Trích đề Chuyên Hưng Yên năm học 2019-2020)

Cho hai đường thẳng (d): $y = (m - 2)x + m$ và (Δ): $y = -4x + 1$

a) Tìm m để (d) song song với (Δ).

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1; 2)$ với mọi m .

c) Tìm tọa độ điểm B thuộc (Δ) sao cho AB vuông góc với (Δ).

Bài 18: (Trích đề Chuyên Nam Định năm học 2019-2020)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và đường thẳng $y = 3x + m + 5$ (với $m \neq \pm 1$) là hai đường thẳng song song.

Bài 19: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Bình Phước năm học 2018-2019)

Cho hàm số (P): $y = x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d): $y = 2x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn

$$y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2 = 12.$$

Bài 20: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm học 2018-2019)

Cho hàm số $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là d . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là 1 cm^2 (O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục là cm).

Bài 21: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hóa năm học 2017-2018)

Biết phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 22: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Bắc Ninh năm học 2016-2017)

Trong hệ trục tọa độ Oxy hãy tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

Bài 23: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hưng Yên năm học 2016-2017)

Cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có đồ thị (d). Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $OB + OC$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ).

Bài 24: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Đắk Lắk năm học 2015-2016)

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2)$ và cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B khác gốc tọa độ O mà thỏa mãn $OA + OB = 6$.

Bài 25: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Đà Nẵng năm học 2015-2016)

Cho hàm số $y = ax + a + 1$ với a là tham số, $a \neq 0$ và $a \neq -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đồ thị của hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Bài 26: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh An Giang năm học 2015-2016)

Cho Parabol $y = \frac{1}{4}x^2$ (P) và điểm $A(0; 1)$.

a) Vẽ Parabol P trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trên Parabol P thì độ dài đoạn thẳng AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$. Biết rằng khoảng cách giữa hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy được tính theo công thức $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$.

Bài 27: (Trích đề thi học sinh giỏi tỉnh Hưng Yên năm học 2014-2015)

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$ (m là tham số thực).

Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$.

Bài 28: (Trích đề vào 10 Chuyên Cà Mau năm học 2018-2019)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 2$

- Vẽ đồ thị của (P) và d trên cùng một mặt phẳng tọa độ
- Tìm m để d và (P) và đường thẳng $(\Delta): y = (2m - 3)x - 1$ cùng đi qua điểm có hoành độ lớn hơn 1

Bài 29: (Trích đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm học 2018-2019)

Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = x - m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $(x_1 - x_2)^8 + (y_1 - y_2)^8 = 162$

Bài 30: (Trích đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm học 2018-2019)

Tìm m để đường thẳng $y = x + m^2 + 2$ và đường thẳng $y = (m - 2)x + 11$ cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung

Bài 31: (Trích đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm học 2018-2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): 2mx - m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $2x_1 + 2x_2 + y_1y_2 = 0$

Bài 32: (Trích đề vào 10 Chuyên Hà Nam năm học 2018-2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = x^2$ và $(d): y = m, (d'): y = m^2$ ($0 < m < 1$).

Đường d cắt P tại hai điểm phân biệt A, B , đường d' cắt P tại hai điểm phân biệt C, D (hoành độ A và D âm). Tìm m sao cho diện tích tứ giác $ABCD$ gấp 9 lần diện tích tam giác OCD .

Bài 33: (Trích đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm học 2018-2019)

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx + m$ và $(d_2): y = \frac{-4}{3}x + b$ (với m là tham số $m \neq 0$).

Gọi $I(x_0; y_0)$ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Tính: $T = x_0^2 + y_0^2$

Bài 34: (Trích đề vào 10 Chuyên Lâm Đồng năm học 2018-2019)

Trên hệ trục tọa độ Oxy (cách chọn đơn vị trên hai trục tọa độ như nhau), cho đường thẳng (d) có hệ số góc là $-\frac{4}{3}$ và đường thẳng (d) đi qua $A(3; 4)$. Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng (d)

Bài 35: (Trích đề vào 10 Chuyên Đồng Nai năm học 2018-2019)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(50;100)$ và $N(100;0)$. Tìm số các điểm nguyên nằm bên trong tam giác OMN (Một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó đều là các số nguyên)

Bài 35: (Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)

Cho đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Bài 36: (Trích đề vào 10 Chuyên Kiên Giang năm học 2018-2019)

Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2mx - 4m$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$

Bài 37: (Trích đề vào 10 Chuyên Thừa Thiên Huế năm học 2018-2019)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $d: y = \frac{11}{8}x - \frac{3}{2}$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và d . Tìm tọa độ điểm C trên trục tung sao cho $CA + CB$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 38: (Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)

Cho hai hàm số $y = 2x^2$ và $y = |mx|$. Tìm m để hai đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại ba điểm phân biệt là ba đỉnh của tam giác đều.

Bài 39: (Trích đề vào 10 Chuyên Điện Biên năm học 2018-2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = -2x + 3$ và Parabol $(P): y = x^2$. Tìm tọa độ các giao điểm A, B của (d) và (P) . Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB .

Bài 40: (Trích đề vào 10 Chuyên Đà Nẵng năm học 2018-2019)

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 2m$, với m là tham số. Gọi A và H lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm C và D nằm về hai phía trục tung sao cho C có hoành độ âm và $BD = 2AC$

Bài 41: (Trích đề vào 10 Chuyên Hà Nam năm học 2018-2019)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và hai đường thẳng $(d): y = m$; $(d'): y = m^2$ (với $0 < m < 1$). Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B ; đường thẳng (d') cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt C, D (với

hoành độ điểm A và D là số âm). Tìm m sao cho diện tích hình thang $ABCD$ gấp 9 lần diện tích tam giác OCD .

Bài 42: (Trích đề vào 10 Chuyên Bình Phước năm học 2018-2019)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$. Với giá trị nào của m thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 43: (Trích đề vào 10 Chuyên Trà Vinh năm học 2018-2019)

Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2$ tại điểm $A(-1; 1)$.

Bài 44: (Trích đề vào 10 Chuyên Tiền Giang năm học 2018-2019)

1. Trong mặt phẳng Oxy , cho Parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): x - 2y + 12 = 0$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A và B của (d) và (P) .

b) Tìm tọa độ điểm C nằm trên (P) sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Bài 45: (Đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2015-2016)

Một xe tải có chiều rộng là $2,4m$ và chiều cao là $2,5m$ muốn đi qua một cái cổng có hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là $4m$ và khoảng từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới chân cổng là $2\sqrt{5}m$ (bỏ qua độ dày của cổng).

1). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi Parabol $(P): y = ax^2$ với $a < 0$ là hình chiếu biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a = -1$

2). Hỏi xe tải có thể đi qua cổng được không? Tại sao?

Bài 46: (Đề vào 10 Chuyên Hải Dương năm 2012-2013)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2x - m + 1$ và parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$.

2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ sao cho $x_1x_2(y_1 + y_2) + 48 = 0$.

Bài 47: (Đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2012-2013)

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = (3 - m)x + 2 - 2m$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng với $m \neq -1$ thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B .

b) Gọi y_A, y_B lần lượt là tung độ các điểm A, B . Tìm m để $|y_A - y_B| = 2$.

Bài 48: (Đề vào 10 Chuyên Toán Quảng Nam năm 2012-2013)

Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d): $y = bx + c$ với $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác vuông trong đó a là độ dài cạnh huyền. Chứng minh rằng (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 2$

Bài 49. (Đề vào 10 Chuyên Vĩnh Phúc năm 2011-2012)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (P) của hàm số: $y = x^2 - (2m^2 + 1)x + m - 1$ và đường thẳng (D): $y = 3x + \frac{m}{2}$; trong đó m là tham số.

a) Cho $m = 1$, tìm hoành độ các giao điểm của (P) và (D).

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (P) và (D) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ không âm.

Bài 50. (Đề vào 10 Chuyên Bình Phước năm 2012-2013)

Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m + 3)x - m^2 - 3$ (1).

Tìm giá trị m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn hệ

$$\text{thức: } x_1 + x_2 - \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{57}{4}$$

Bài 51. (Đề vào 10 Chuyên Đà Nẵng năm 2009-2010)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = x + 2$. Chứng minh rằng (P) và (Δ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B; xác định tọa độ hai điểm đó. Tính diện tích tam giác OAB (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

Bài 52. (Đề vào 10 Chuyên Kiên Giang năm 2010-2011)

Cho hàm số $y = (m - 3)x + 2 + m$. Xác định m để:

a) Hàm số là hàm số bậc nhất nghịch biến.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1; 1)$

c) Đồ thị cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

Bài 53. (Đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2013-2014)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $2x - y - a^2 = 0$ và Parabol (P): $y = ax^2$ (a là tham số dương).

a. Tìm giá trị a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng tỏ khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = \frac{4}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$

Bài 54. (Đề vào 10 Chuyên Đà Nẵng năm 2009-2010)

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + ax$ (x là biến số)

1/ Xác định a để hàm số luôn đồng biến.

2/ Xác định a để đồ thị hàm số đi qua điểm $B(1; 6)$. Vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho với a vừa tìm được.

3/ Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = x + m$$

Bài 55. (Đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm 2009-2010)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (k-1)x + 4$ (k là tham số) và parabol (P): $y = x^2$.

1. Khi $k = -2$, hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P);
2. Chứng minh rằng với bất kỳ giá trị nào của k thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt;
3. Gọi $y_1; y_2$ là tung độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm k sao cho: $y_1 + y_2 = y_1 y_2$.

Bài 56. (Đề vào 10 Chuyên Đồng Nai năm 2012-2013)

Cho parabol $y = x^2$ (P) và đường thẳng $y = mx$ (d), với m là tham số.

- 1/ Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.
- 2/ Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng $\sqrt{6}$

Bài 57. (Đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2016-2017)

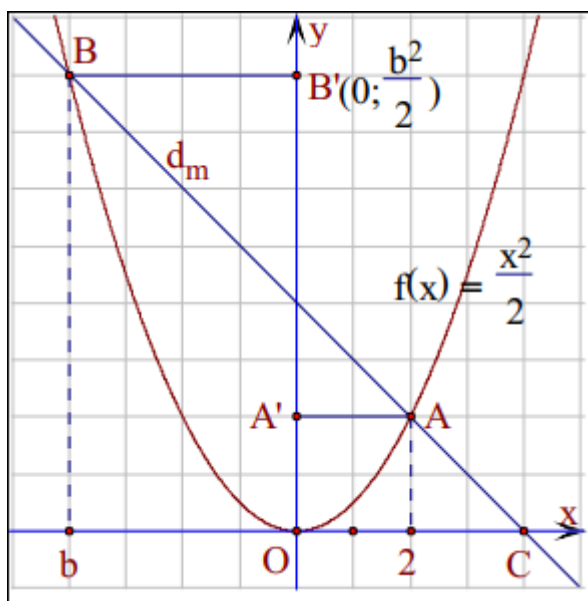
Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 1$ với m là tham số.

- a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = 1$
- b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m , d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Cách 1



Đường thẳng d_m có phương trình là $y = m(x - 2) + 2$ luôn đi qua điểm $A(2; 2)$ của (P) .

Hình chiếu vuông góc của C lên Oy là $O(0; 0)$, của A lên Oy là $A'(0; 2)$, của $B\left(b; \frac{b^2}{2}\right)$ lên Oy là $B'\left(0; \frac{b^2}{2}\right)$.

Theo định lí Thales có: $3 = \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'O} \Rightarrow A'B' = 3A'O$

Suy ra $A'B' = 6 \Rightarrow OB' = 8 \Rightarrow \frac{b^2}{2} = 8 \Rightarrow b = \pm 4$

Nếu $b = 4$, thế vào d_m tìm được $m = 3$; Nếu $b = -4$, thế vào d_m tìm được $m = -1$.

Cách 2

Phương trình đường thẳng d_m là $y = mx - 2m + 2 \Rightarrow$ tọa độ điểm C là

$$C\left(\frac{2m-2}{m}; 0\right)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và $(P): x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (1). Vì

$A(2; 2)$ thuộc (P) và d_m nên (1) có 1 nghiệm $x_A = 2 \Rightarrow B(2m - 2; 2m^2 - 4m + 2)$

$$AB^2 = 4(m-2)^2(m^2+1), AC^2 = \frac{4(m^2+1)}{m^2} \text{ từ } AB = 3AC \Leftrightarrow 4(m-2)^2(m^2+1) =$$

$$9 \cdot \frac{4(m^2+1)}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 m^2 = 9 \Leftrightarrow m(m-2) = \pm 3 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 3.$$

Bài 2:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$2x^2 = 2mx + m + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - m - 2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \Delta' = m^2 - 2(-m-2) = (m+1)^2 + 3 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow d$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = \frac{-m-2}{2} \end{cases}$$

Theo giả thiết

$$x_1^2 - 6x_2^2 - x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 3x_2)(x_1 + 2x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m}{4} \\ x_1 = \frac{3m}{4} \end{cases} \text{ do đó ta có}$$

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{3m}{4} = \frac{-m-2}{2} \Leftrightarrow 3m^2 + 8m + 16 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{TH2: } x_1 = -2x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -m \\ x_1 = 2m \end{cases} \text{ do đó ta có}$$

$$-2m^2 = \frac{-m-2}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Vậy $m = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3:

Ta có $|AB - AC| \leq BC$ nên GTLN $|AB - AC| = BC$ khi A, B, C thẳng hàng hay A là giao điểm của (d) với $Ox \Rightarrow A(3;0)$.

Bài 4:

Xét tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài. Gọi $C(0;c), D(0;d)$ thì $c > d > 0$.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $OC \cdot OD = OA \cdot OB$ suy ra $c \cdot d = p^8 \cdot p^9 = p^{17}$. (1)

Do p nguyên tố và c, d nguyên dương nên có 9 cặp $(c; d)$ với $c > d$ thỏa mãn (1) là:

$$(p^{17}; 1), (p^{16}; p), \dots, (p^9; p^8).$$

Vậy có 9 tứ giác thỏa mãn đề bài.

Bài 5:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$-x^2 = x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + m - 2 = 0 \quad (1)$$

Ta có: $\Delta = 1 - 4(m - 2) = 9 - 4m$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4} \quad (2)$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$

Theo đề bài:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 < 3 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 < 3 \\ \Rightarrow 1 - 2(m - 2) < 3 &\Leftrightarrow 5 - 2m < 3 \Leftrightarrow m > 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow 1 < m < \frac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 6:

a) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(0;1)$ có hệ số góc k : $y = kx + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) : $x^2 - kx - 1 = 0$ (1).

Phương trình (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0, \forall k$.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt hay đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi giá trị k .

b) Gọi $A(x_1; x_1^2)$ và $B(x_2; x_2^2)$. Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1), suy ra $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Phương trình đường thẳng OA : $y = x_1 \cdot x$

Phương trình đường thẳng OB : $y = x_2 \cdot x$

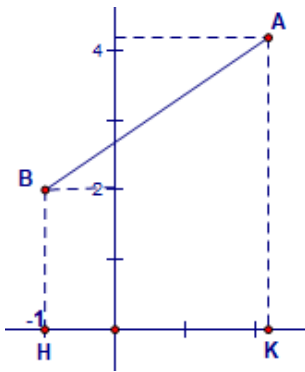
Do $x_1 \cdot x_2 = -1$ nên $OA \perp OB$. Vậy $\triangle OAB$ là tam giác vuông.

Bài 7:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$$m^2 x - m^4 + 2 = \frac{m^2}{m^2 + 1} x + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^4}{m^2 + 1} x = m^4 \Leftrightarrow x = m^2 + 1 \text{ (vì } m \neq 0) \Rightarrow y = m^2 + 2 \Rightarrow A(m^2 + 1; m^2 + 2)$$



H, K lần lượt là hình chiếu của B, A lên Ox nên $H(-1; 0)$, $K(m^2 + 1; 0)$

$$S_{ABHK} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{(AK + BH)HK}{2} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow (AK + BH)HK = 15$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 4)(m^2 + 2) = 15 \Leftrightarrow m^4 + 6m^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = -7 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$$

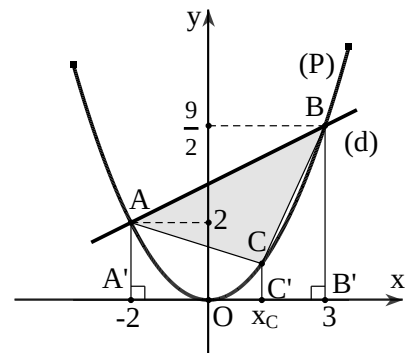
Bài 8: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2, x = 3.$$

Các giao điểm là $A(-2; 2)$ và $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

Gọi $C\left(x_C; \frac{x_C^2}{2}\right)$ với $-2 < x_C < 3$. Gọi A', B', C' theo thứ

tự là hình chiếu của A, B, C trên trục hoành. Ta có



$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{9}{2} \right) \cdot 5 - \frac{1}{2} \left(2 + \frac{x_C^2}{2} \right) \cdot (x_C + 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + \frac{x_C^2}{2} \right) (3 - x_C) \\
&= -\frac{5}{4} x_C^2 + \frac{5}{4} x_C + \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{125}{16} - \frac{5}{4} \left(x_C - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{125}{16}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\frac{125}{16}$ khi $x_C = \frac{1}{2}$.

Bài 9:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 1$ và $(d'): x + (m+2)y = m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Nhận xét $A(1;3) \in (d); B(0;1) \in (d')$

- Với $m = -2$ thì $(d): y = 3$ và $(d'): x = 0$ vuông góc với nhau
- Với $m \neq -2$ thì $(d'): y = -\frac{1}{m+2}x + 1$

$$\text{Khi đó ta có } a \cdot a' = (m+2) \left(-\frac{1}{m+2} \right) = -1 \Rightarrow (d) \perp (d')$$

Vậy $(d) \perp (d')$ với mọi m

Vậy giao điểm của hai đường thẳng nói trên nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông nên thuộc đường tròn đường kính AB khi m thay đổi.

Bài 10:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 - (m-1)x + 1 = 0 \quad (1)$.

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |m-1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases} (*).$$

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m-1; x_1 x_2 = 1$.

Từ giả thiết ta có $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$.

$$\text{Khi đó } y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow x_1^6 - x_2^6 = 18(x_1^3 - x_2^3) \Leftrightarrow (x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 - 18) = 0 \quad (2).$$

$$\text{Do } x_1 \neq x_2 \text{ nên } (2) \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 18 = 0.$$

Do đó,

$$(m-1)^3 - 3(m-1) - 18 = 0 \Leftrightarrow (m-1-3)\left[(m-1)^2 + 3(m-1) + 6\right] = 0 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (t/m (*))}.$$

Bài 11:

Phương trình hoành độ của (P) và d là:

$$2ax^2 = 4x - 2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4x + 2a^2 = 0 \quad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4.2a.2a^2 > 0 \Rightarrow 16 - 16a^3 > 0 \Rightarrow 1 - a^3 > 0 \Rightarrow (1-a)(1+a+a^2) > 0$$

$$\Rightarrow (1-a)\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

Ngoài ra, ta có:

$$x_M = \frac{4 + \sqrt{16 - 16a^3}}{2.2a} = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} \quad x_N = \frac{4 - \sqrt{16 - 16a^3}}{2.2a} = \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a}$$

$$x_M + x_N = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} + \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = \frac{2}{a}$$

$$2x_M \cdot x_N = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = 2a$$

$$\text{Mà } K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N} = \frac{8}{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2a} = 4a + \frac{1}{2a} \stackrel{BDT \text{ Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}$$

Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là

$$4a + \frac{1}{2a} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2 - 4\sqrt{2}a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 12:

Vì d_2 vuông góc với d_1 nên $d_2: y = 4x + b$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d_2 và (P) :

$$2x^2 = 4x + b \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - b = 0(1)$$

d_2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + 2b > 0 \Leftrightarrow b > -2$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (!)

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1; y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2(x_1 + x_2) + b = 4 + b$$

Vậy $I(1; 4+b)$

$$\text{Suy ra: } OI^2 = b^2 + 8b + 17, AB = \sqrt{17(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{17(4 + 2b)}$$

$$\sqrt{5}AB = \sqrt{17}OI \Leftrightarrow 5(4 + 2b) = b^2 + 8b + 17$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy $d_2: y = 4x - 1$ hoặc $d_2: y = 4x + 3$

Bài 13:

a/ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = 2mx + 2m + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có: } \Delta' = m^2 + 2m + 3 = (m + 1)^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Vì thế: phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b/ Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ hai giao điểm của (d) và (P)

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} y_1 = 2m.x_1 + 2m + 3 \\ y_2 = 2m.x_2 + 2m + 3 \end{cases} \text{ và } x_1, x_2 \text{ chính là hai nghiệm của } (*)$$

$$\text{Theo Vi-ét, có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -2m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Có: } y_1 + y_2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2m.x_1 + 2m + 3 + 2m.x_2 + 2m + 3 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2m.(x_1 + x_2) + 4m + 6 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2m.2m + 4m + 6 - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2m + 1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \quad (\text{do } (2m + 1)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2}.$$

Bài 14:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = 2x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta' = m - 1$. (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$.

Bài 15:

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là

$$x^2 = 2x + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$$

Phương trình bậc hai có $ac = -m^2 - 1 < 0$ với mọi m nên luôn có hai nghiệm phân biệt khác 0 với mọi m . Do đó (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với mọi m

x_A, x_B là các nghiệm khác 0 của phương trình $x^2 - 2x - m^2 - 1 = 0$.

Áp dụng hệ thức Vi et ta có:
$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A \cdot x_B = -m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Do } \frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{-38}{5} \Leftrightarrow 5(y_A \cdot x_A + y_B \cdot x_B) = -38 \cdot x_A \cdot x_B$$

$$\Leftrightarrow 5(x_A^3 + x_B^3) = -38 \cdot x_A \cdot x_B \Leftrightarrow 5[(x_A + x_B)^3 - 3x_A \cdot x_B(x_A + x_B)] = -38 \cdot x_A \cdot x_B$$

$$\Leftrightarrow 5[8 - 6(-m^2 - 1)] = -38 \cdot (-m^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = 2$ và $m = -2$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 16:

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(\sqrt{5}; \sqrt{50})$

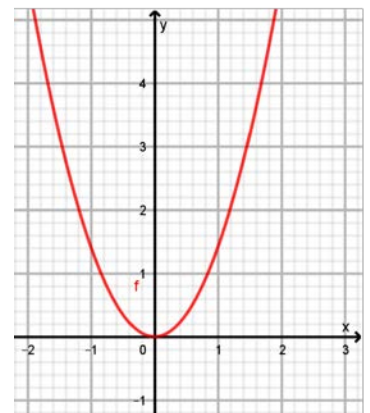
$$\Rightarrow \sqrt{50} = a \cdot \sqrt{5}^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Vậy $a = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x^2$

Bảng giá trị

x	-1	0	1
$y = \sqrt{2}x^2$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$

Đồ thị như hình



b) Điểm $M(m; n)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow n = \sqrt{2}m^2$ (1)

Giả sử điểm $N(n; m)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow m = \sqrt{2}n^2$ (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được $n - m = \sqrt{2}(m^2 - n^2)$

$$(n - m)(1 + \sqrt{2}(n + m)) = 0$$

+ TH1: Nếu $n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$ thay vào (1) ta được

$$n = \sqrt{2}n^2 \Rightarrow n = 0; n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

+ TH2: Nếu $1 + \sqrt{2}(n + m) = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{2}n + \sqrt{2}m = 0$

$$\Rightarrow n = -\frac{\sqrt{2}}{2} - m$$

Thay vào (1) ta được

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - m = \sqrt{2}m^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}m^2 + m + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3 < 0$$

Phương trình vô nghiệm

Vậy $m = n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì điểm $M(m, n)$ thuộc đồ thị (P) khi đó điểm $N(n; m)$ thuộc (P) .

Bài 17:

a) (d) song song với (Δ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = -4 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

b) Thay $x = -1; y = 2$ vào phương trình $y = (m - 2)x + m$ được:

$$2 = (m - 2) \cdot (-1) + m \Leftrightarrow 2 = -m + 2 + m \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (đúng với } \forall m)$$

Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(-1; 2)$ với mọi m .

c) Cách 1:

Vì điểm B thuộc (Δ) nên tọa độ điểm B có dạng $(x_0; 1 - 4x_0)$

ĐK: B khác A hay $x_0 \neq -1$

Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$

Vì $A(-1; 2)$ và $B(x_0; 1 - 4x_0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ ax_0 + b = 1 - 4x_0 \end{cases} \Rightarrow a(x_0 + 1) = -4x_0 - 1 \Rightarrow a = \frac{-4x_0 - 1}{x_0 + 1}$$

AB vuông góc với (Δ)

$$\Leftrightarrow aa' = -1 \text{ hay } \frac{-4x_0 - 1}{x_0 + 1} \cdot (-4) = -1$$

$$\Rightarrow 16x_0 + 4 = -x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-5}{17}$$

$$\Rightarrow y_0 = 1 - 4 \cdot \frac{-5}{17} = \frac{37}{17}$$

Vậy tọa độ điểm B là $\left(\frac{-5}{17}; \frac{37}{17}\right)$.

Cách 2:

Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$

AB vuông góc với (Δ)

$$\Leftrightarrow aa' = -1 \text{ hay } a \cdot (-4) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB có dạng $y = \frac{1}{4}x + b$

Vì đường thẳng $y = \frac{1}{4}x + b$ đi qua $A(-1; 2)$ nên:

$$2 = \frac{1}{4} \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB là $y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \\ y = -4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{17} \\ y = \frac{37}{17} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{-5}{17}; \frac{37}{17}\right)$$

Bài 18:

Hai đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + 7$ và $y = 3x + m + 5$ (với $m \neq \pm 1$) song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ 7 \neq m + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 19:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 2x + m - 1$ hay

$$x^2 - 2x - m + 1 = 0 \quad (1)$$

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (-m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Do A, B thuộc (P) nên $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$. Theo đề bài ta có

$$y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}$$

Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m + 1 \end{cases}$

Nếu $x_1 \cdot x_2 = 4$ thì $-m + 1 = 4 \Rightarrow m = -3$ (loại).

Nếu $x_1 \cdot x_2 = -3$ thì $-m + 1 = -3 \Rightarrow m = 4$ (nhận). Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 20:

Vì ba điểm O, A, B tạo thành một tam giác nên $m^2 - 4m - 4 \neq 0$ và $3m - 2 \neq 0$.

Tọa độ giao điểm A của d và Ox là $A\left(\frac{2-3m}{m^2-4m-4}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{2-3m}{m^2-4m-4}\right|$.

Tọa độ giao điểm B của d và Oy là $B(0; 3m-2) \Rightarrow OB = |3m-2|$.

Do tam giác ABO vuông tại O nên $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left|\frac{2-3m}{m^2-4m-4}\right| |3m-2| = 1$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } \frac{(3m-2)^2}{|m^2-4m-4|} = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 12m + 4 = 2(m^2 - 4m - 4) \\ 9m^2 - 12m + 4 = -2(m^2 - 4m - 4) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7m^2 - 4m + 12 = 0 \\ 11m^2 - 20m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{2}{11} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Bài 21:

Phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)((m-2)x - m) = 0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 2$. Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $a = 1$ và $b = \frac{m}{m-2}$.

Hai nghiệm đó là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông suy ra $\frac{m}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 2$.

Từ hệ thức $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$ trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{1^2} + \frac{(m-2)^2}{m^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{m-2}{m} = \pm \frac{1}{2}$

Với $\frac{m-2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4 = m \Rightarrow m = 4$ (thỏa mãn)

Với $\frac{m-2}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4 = -m \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ (loại)

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 22:

Ta có $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = 3\sqrt{x} \end{cases}$

+ Với $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0$, không có x thỏa mãn.

+ Với $y = 3\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

Từ đó tìm được các điểm thỏa mãn là $M(1;3)$ hoặc $M\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 23:

+ Do (d) đi qua điểm $A(1;2)$ nên thay giá trị x, y vào ta được $a + b = 2$

+ Do (d) cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương khi đó $y = 0$ nên $OB = \frac{-b}{a} > 0$

+ Do (d) cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương khi đó $x = 0$ nên $OC = b > 0$

Vì $b > 0$ và $\frac{-b}{a} > 0$ nên $a < 0$.

Ta có $OB + OC = -\frac{b}{a} + b = -\frac{2-a}{a} + 2 - a = \frac{3a - a^2 - 2}{a} = 3 + \left(-a + \frac{2}{-a}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $-a + \frac{2}{-a} \geq 2\sqrt{-a \cdot \frac{2}{-a}} = 2\sqrt{2}$ nên

$$3 - \frac{2}{a} - a \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

Suy ra $OB + OC \geq 3 + 2\sqrt{2}$. Theo bài ra thì dấu bằng xảy ra nên

$$a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{2} \text{ (vì } a \text{ âm)}. \text{ Từ đó ta được } a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = 2 + \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = -\sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$.

Bài 24:

Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$. Do đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ nên ta có $2 = a + b$. Do đường thẳng cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B nên ta có

Khi $x = 0$ thì $y = b$, do đó ta có $B(0;b)$. Khi $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, do đó ta có

$$A\left(-\frac{b}{a}; 0\right).$$

Mà ta có $OA + OB = 6$ nên ta được $|b| + \left| -\frac{b}{a} \right| = 6$.

Chú ý rằng đường thẳng cắt tia Ox và Oy nên ta có $b > 0; -\frac{b}{a} > 0$ do đó $b > 0; a < 0$.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} a + b = 2 \\ b - \frac{b}{a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ (2 - a) + \frac{a - 2}{a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = 3 \\ a = -2; b = 4 \end{cases}$$

Vậy các đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = -x + 3$ hoặc $y = -2x + 4$.

Bài 25:

Do $a \neq 0$ và $a \neq -1$ nên đồ thị hàm số $y = ax + a + 1$ cắt trục tung và trục hoành tại các điểm khác gốc tọa độ O . Gọi các giao điểm đó là $A\left(-\frac{a+1}{a}; 0\right)$ và $B(0; a+1)$.

Khi đó ta có các khoảng cách $OA = \left| -\frac{a+1}{a} \right|$; $OB = |a+1|$. Gọi h là khoảng cách từ O đến đồ thị của $y = ax + a + 1$.

Khi đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2}.$$

Từ đó ta được $h^2 = \frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \frac{a^2+2a+1}{a^2+1} = 1 + \frac{2a}{a^2+1} \leq 1 + \frac{2|a|}{a^2+1} \leq 2$, dấu bằng xảy ra khi $a = 1$

Từ đó suy ra $h \leq \sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến đường thẳng $y = ax + a + 1$ là $\sqrt{2}$ khi $a = 1$.

Cách khác: Ta cũng có thể tìm giá trị lớn nhất của h theo cách khác như sau

$$\text{Diện tích tam giác } OAB \text{ là } S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{a+1}{a} \right| \cdot |a+1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+1)^2}{|a|}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2} + (a+1)^2} = \left| \frac{a+1}{a} \right| \sqrt{a^2 + 1}.$$

Từ đó ta được $h = \frac{2S}{AB} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$. Đến đây ta tìm giá trị lớn nhất của h tương tự như trên.

Bài 26:

Gọi tọa độ điểm M là $M\left(x_M; \frac{1}{4}x_M^2\right)$ và N là hình chiếu của M trên đường thẳng $y = -1$, khi đó ta có $N(x_M; -1)$. Từ đó ta được khoảng từ M đến đường thẳng $y = -1$ là $MN = y_M + 1 = \frac{1}{4}x_M^2 + 1$.

Do có $M\left(x_M; \frac{1}{4}x_M^2\right)$ và $A(0; 1)$ nên theo công thức tính khoảng cách trên ta có

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{x_M^2 + \left(\frac{1}{4}x_M^2 - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}x_M^4 + \frac{1}{2}x_M^2 + 1} = \frac{1}{4}x_M^2 + 1$$

Từ đó ta được $AM = MN$ hay độ dài đoạn AM bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -1$.

Chú ý: Với hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$

bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta có thể chứng minh công thức

$$CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} \text{ theo cách}$$

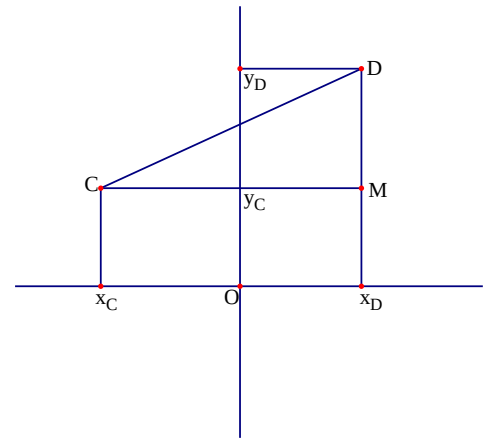
sau.

Giả sử tọa độ của các điểm C và D được cho như hình vẽ. Khi đó ta có

$$CM = |x_C - x_D| \text{ và } DM = |y_C - y_D|. \text{ Do tam}$$

giác CDM vuông tại M nên ta có

$$CD = \sqrt{CM^2 + DM^2} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$$



Bài 27:

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$

Ta có $\Delta = m^2 + 4$ (vì $m^2 + 4 > 0$) nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt)

Theo hệ thức Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$

Gọi A $(x_1; y_1)$ và B $(x_2; y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10} \\
\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 &= 10 \\
\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 &= 10 \\
\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] &= 10 \\
\Rightarrow m^2 + 4 + m^2 \cdot (m^2 + 4) &= 10 \\
\Leftrightarrow m^4 + 5m^2 - 6 &= 0 \\
\Leftrightarrow m^4 - m^2 + 6m^2 - 6 &= 0 \\
\Leftrightarrow (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 6) &= 0 \\
\Leftrightarrow m^2 - 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow m = \pm 1
\end{aligned}$$

Bài 28:

a) Bạn tự vẽ hình

b) Giao điểm của (d) và (P) là hoành độ của phương trình:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Do } x > 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 + 2 = 4 \Rightarrow M(2; 4)$$

Đường thẳng (Δ): $y = (2m - 3)x - 1$ đi qua điểm $M(2; 4)$ nên:

$$4 = (2m - 3) \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow m = \frac{11}{4}$$

Vậy $m = 11/4$ là giá trị cần tìm.

Bài 29:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $x^2 = x - m \Leftrightarrow x^2 - x + m = 0(*)$

Hai đồ thị hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Khi đó ta có: $y_1 = x_1 - m, \quad y_2 = x_2 - m$

Áp dụng hệ thức Vi ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có:

$$(x_1 - x_2)^8 + (y_1 - y_2)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - m - x_2 + m)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 + (x_1 - x_2)^8 = 162$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^8 = 81 = (\sqrt{3})^8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = \sqrt{3} \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + \sqrt{3} \\ x_1 = x_2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } x_1 = x_2 + \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 + \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (tm)$$

$$+) \text{ Với } x_1 = x_2 - \sqrt{3} \Rightarrow 2x_2 - \sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = m = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \quad (tm)$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 30:

Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a' \Leftrightarrow 1 \neq m - 2 \Leftrightarrow m \neq 3$

Giả sử hai đồ thị cắt nhau tại điểm $A \in Oy \Rightarrow A(0; y_A)$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là :

$$x + m^2 + 2 = (m - 2)x + 11$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)x = m^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)x = (m - 3)(m + 3) \quad (*)$$

Hai đồ thị cắt nhau tại A nên khi đó $x = 0$ là nghiệm của phương trình (*)

$$\Rightarrow 0 \cdot (m - 3) = (m - 3)(m + 3)$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)(m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 \\ m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$$

Với $m = 3$ (loại) do 2 đường thẳng trùng nhau

Vậy với $m = -3$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung

Bài 31:

Ta có: phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - (4m - 1) = (2m - 1)^2 + 3 > 0 \quad (\forall m)$$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + (x_1 x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = -1$

Bài 32:

Điều kiện: $0 < m < 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị hàm số (P) là:

$$x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-\sqrt{m}; m) \\ B(\sqrt{m}; m) \end{cases}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d' và đồ thị hàm số (P) là:

$$x^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(m; m^2) \\ D(-m; m^2) \end{cases}$$

Ta có d, d' là hai đường thẳng cùng song song với $Ox \Rightarrow d // d'$ hay $AB // CD \Rightarrow ABCD$ là hình thang

Khi đó ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).d(d, d')$

Có: $d(d, d') = |m - m^2| = m - m^2 \quad (do \quad 0 < m < 1)$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{m} + \sqrt{m})^2} = 2\sqrt{m}$$

$$CD = \sqrt{(-m - m)^2} = 2m$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).d(d; d')$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{m} + 2m)(m - m^2) = (\sqrt{m} + m)(m - m^2)$$

Lại có: $S_{OCD} = \frac{1}{2}d(O; CD).CD = \frac{1}{2}m^2.2m = m^3$

Theo đề bài ta có: $S_{ABCD} = 9.S_{OCD}$

$$\Rightarrow (\sqrt{m} + m)(m - m^2) = 9m^3$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt{m}(\sqrt{m} + 1)(1 - m) = 9m^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m} - m\sqrt{m} + 1 - m = 9m\sqrt{m}$$

$$\Leftrightarrow 10m\sqrt{m} + m - \sqrt{m} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{m} - 1)(5m + 3\sqrt{m} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{m} - 1 = 0 \\ 5m + 3\sqrt{m} + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{VN}) \Leftrightarrow \sqrt{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$ thỏa mãn bài toán

Bài 33:

Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình .

$$-\frac{1}{m}x + \frac{1}{m} = mx + m \Leftrightarrow x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

$$\text{do } x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \Rightarrow y = \frac{2m}{1 + m^2} \Rightarrow I\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}; \frac{2m}{1 + m^2}\right)$$

$$T = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1 + m^2}\right)^2 = 1$$

Bài 34:

Giả sử đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$

Theo đề bài : đường thẳng (d) có hệ số góc là $-\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{phương trình đường thẳng } (d) \text{ có dạng } y = -\frac{4}{3}x + b$$

Theo đề bài ta có: đường thẳng (d) đi qua $A(3;4)$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} \cdot 3 + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow (d): y = -\frac{4}{3}x + 8$$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d) với Ox và $Oy \Rightarrow A(x_A; 0); B(0; y_B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{4}{3}x_A + 8 \\ y_B = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -6 \\ y_B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-6; 0) \\ B(0; 8) \end{cases}$$

Xét tam giác vuông OAB có đường cao AH chính là khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d)

Suy ra độ dài $\Rightarrow OA = |x_A| = 6; OB = |y_B| = 8$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông OAB có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{25}{576} \Rightarrow AH = \frac{24}{5}$$

Vậy khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng (d) là $\frac{24}{5}$

Bài 35:

Gọi phương trình đường thẳng OM là: $y = ax + b$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} b = 0 \\ 50a + b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow OM : y = 2x$$

Tương tự ta có:

Phương trình đường thẳng ON là: $y = 0$

Phương trình đường thẳng MN là: $y = -2x + 200$

Những điểm nằm trong tam giác OMN phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y < 2x \\ y < -2x + 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ -2x + 200 > 0 \Rightarrow x < 100 \end{cases}$$

Do tọa độ nguyên nên các điểm thỏa mãn đề bài là : $x = 1; 2; 3; \dots; 98; 99$

Lại có: $2x \leq -2x + 200 \Leftrightarrow x \leq 50; 2x > -2x + 200 \Leftrightarrow x > 50$

Từ đó:

Nếu $x = 1$ ta có: $y < 2x \Rightarrow y < 2 \Rightarrow$ có 1 điểm nguyên

Nếu $x = 2$ ta có $y < 2x \Rightarrow y < 4 \Rightarrow$ có 3 điểm nguyên

.....

Nếu $x = 50$ ta có $y < 2x \Rightarrow y < 100 \Rightarrow$ có 99 điểm nguyên

Nếu $x = 51 \Rightarrow y < -2x + 100 \Rightarrow y < 98 \Rightarrow$ có 97 điểm nguyên

.....

Nếu $x = 99$ ta có: $y < -2x + 200 \Rightarrow y < 2 \Rightarrow$ có 1 điểm nguyên

Vậy tổng số điểm thỏa mãn là : $2(1 + 3 + 5 + \dots + 97) + 99 = 2 \cdot \frac{49 \cdot (2 \cdot 1 + 48 \cdot 2)}{2} + 99 = 4901$

điểm

Bài 35:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 - 2x - m = 0$ (1)

$$+ \Delta' = 1 + m$$

+ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' > 0$ hay $m > -1$.

+ x_1, x_2 là hai hoành độ của hai giao điểm (d) và (P) nên x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1).

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$ (thí sinh không viết định lý này mà thể hiện ở dòng dưới đúng cũng được).

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4 + 2m = 10 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa } m > -1).$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 36:

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = -2mx - 4m \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 4m = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = 4m \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$|x_1| + |x_2| = 3 \Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 9$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 2.4m + 2.4m = 9$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 8|m| = 9 \quad (1)$$

$$+) m > 4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 8m = 9 \Leftrightarrow m = \pm \frac{3}{2} \text{ (ktm)}$$

$$+) m < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4m^2 - 8m - 8m = 9 \Leftrightarrow (2m - 9)(2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Vậy với $m = -1/2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$|x_1| + |x_2| = 3$$

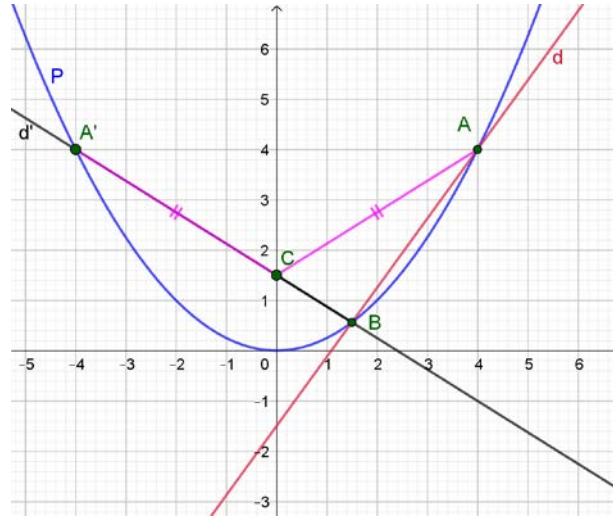
Bài 37:

Hoành độ của A và B là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{4}x^2 = \frac{11}{8}x - \frac{3}{2}$.

Phương trình này có hai nghiệm: $x = 4$ và $x = \frac{3}{2}$.

Suy ra $A(4; 4), B\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{16}\right)$.

Để thấy hai điểm A, B cùng nằm về một phía so với trục tung. Lấy điểm $A'(-4; 4)$ đối xứng với A qua trục tung. Khi đó $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$, nên $CA + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi A', C, B thẳng hàng, tức là khi C là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với trục tung.



Phương trình đường thẳng d' đi qua A' và B có dạng $y = ax + b$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 4 = -4a + b \\ \frac{9}{16} = \frac{3}{2}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{8} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } d': y = -\frac{5}{8}x + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } C\left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Bài 38:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 = |mx| \Leftrightarrow 2|x|^2 - |m| \cdot |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{m}{2}; x = -\frac{m}{2}$$

Gọi ba giao điểm là $O(0; 0); A\left(\frac{m}{2}; \frac{m^2}{2}\right); B\left(-\frac{m}{2}; \frac{m^2}{2}\right)$ và H là giao điểm của AB và trục

tung, suy ra $AB = |m|; OH = \frac{m^2}{2}$

$$\text{Tam giác OAB đều} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} |m|$$

Giải và tìm được $m = 0; m = \sqrt{3}; m = -\sqrt{3}$, loại $m = 0$. Vậy $m = \sqrt{3}; m = -\sqrt{3}$

Bài 39:

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$-2x+3=x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}.$$

+ Với $x=1 \Rightarrow y=1$.

+ Với $x=-3 \Rightarrow y=9$.

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $A(1;1), B(-3;9)$.

Gọi C, D lần lượt là giao điểm của (d) và các trục Ox, Oy . Khi đó $C\left(\frac{3}{2}; 0\right), D(0;3)$.

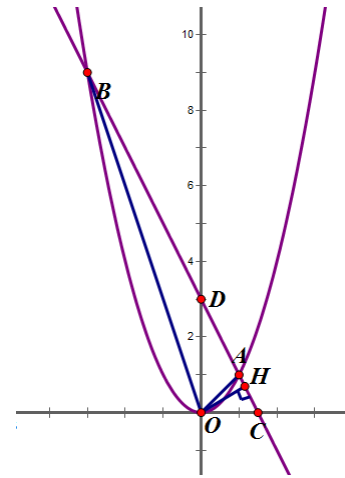
Đường cao OH của tam giác OAB cũng chính là đường cao OH của tam giác vuông OCD .

Ta

có

$$OC = \frac{3}{2}; OD = 3 \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } OH = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$



Bài 40:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = mx + 2m \Leftrightarrow x^2 - mx - 2m = 0 \quad (*)$$

$$\text{Có: } \Delta = m^2 + 8m$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d \cap Ox = A \Rightarrow A(-2;0) \\ d \cap Oy = B \Rightarrow B(0;2m) \end{cases}$$

C và D nằm về 2 phía trục tung và C có hoành độ âm:

$$x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Gọi E và F thứ tự là hình chiếu của C lên trục Ox và D lên trục Oy

$$CE = |y_1| = |mx_1 + 2m| = m(x_1 + 2)$$

$$BF = |y_F - y_B| = |y_2 - y_B| = mx_2 + 2m - 2m = mx_2$$

$$\text{Ta có: } DF \parallel Ox \text{ và } CE \parallel Oy \text{ nên: } \triangle ACE \sim \triangle DBF \quad (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m(x_1 + 2)}{mx_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + 2}{x_2} = \frac{1}{2} \text{ (do } m > 0)$$

$$\Rightarrow x_2 = 2x_1 + 4 \Rightarrow x_1 + 2x_1 + 4 = m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m-4}{3} \\ x_2 = \frac{2m+4}{3} \end{cases} \Rightarrow (m-4)(2m+4) = -18m$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 18m - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 7m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 7m - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+8)(m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 & (ktm) \\ m = 1 & (tm) \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1$

Bài 41:

Tính được $A(-\sqrt{m}; m), B(\sqrt{m}; m), C(m; m^2), D(-m; m^2)$.

Tính được $S_{\Delta OCD} = m^3; S_{ABCD} = (m - m^2)(\sqrt{m} + m)$. (do $1 > m > 0$)

$$\text{Do } S_{ABCD} = 9.S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow (m - m^2)(\sqrt{m} + m) = 9m^3$$

$$\Leftrightarrow 10m\sqrt{m} + m - \sqrt{m} - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{m} = t > 0 \Rightarrow 10t^3 + t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)(10t^2 + 6t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } m = \frac{1}{4}. \text{ Kết luận, } m = \frac{1}{4} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Bài 42:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0(*)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2m - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

Với $0 \leq m \leq 2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$$

Ta có: $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right), B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right)$

$$\Rightarrow T = y_1 + y_2 - x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] - x_1x_2$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 = -2m^2 + 4m = -2(m^2 - 2m + 1) + 2$$

$$= -2(m-1)^2 + 2$$

$$\forall (m-1)^2 \geq 0 \quad \forall m \in [0; 2]$$

$$\text{Đặt } t = m-1 \Rightarrow m \in [0; 2] \Rightarrow t \in [-1; 1] \Rightarrow t^2 \in [0; 1]$$

$$\Rightarrow T = 2 - 2(m-1)^2 = 2 - 2t^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Vậy } \min T = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Bài 43:

Vì đường thẳng (d): $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-1; 1)$ nên ta có:

$$1 = -a + b \Leftrightarrow b = a + 1 \quad (1)$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$ax + b = x^2 \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) được:

$$x^2 - ax - a - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = a+1 \end{cases}$$

Vì (d) tiếp xúc với parabol (P): $y = x^2$ tại điểm $A(-1; 1)$ nên phương trình (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -1$

$$\Leftrightarrow -1 = a + 1 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow b = -2 + 1 = -1$$

Vậy $a = -2; b = -1$.

Bài 44:

a) Ta có (d): $y = \frac{1}{2}x + 6$.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = 9 \\ x = -4 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Vậy 2 giao điểm $A(6; 9), B(-4; 4)$.

b) **Cách 1.**

Gọi $C\left(c; \frac{1}{4}c^2\right) \in (P)$ $c \neq 6, c \neq -4$ là điểm cần tìm.

$$\text{Ta có } AB^2 = 125; \quad AC^2 = (c-6)^2 + \left(\frac{1}{4}c^2 - 9\right)^2 = \frac{1}{16}c^4 - \frac{7}{2}c^2 - 12c + 117;$$

$$BC^2 = (c+4)^2 + \left(\frac{1}{4}c^2 - 4\right)^2 = \frac{1}{16}c^4 - c^2 + 8c + 32.$$

Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Leftrightarrow 125 = \frac{1}{16}c^4 - \frac{7}{2}c^2 - 12c + 117 + \frac{1}{16}c^4 - c^2 + 8c + 32$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}c^4 - \frac{9}{2}c^2 - 4c + 24 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}c^4 - \frac{1}{4}c^3 + \frac{1}{4}c^3 - \frac{1}{2}c^2 - 4c^2 + 8c - 12c + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}c^3(c-2) + \frac{1}{4}c^2(c-2) - 4(c-2) - 12(c-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c-2)\left(\frac{1}{8}c^3 + \frac{1}{4}c^2 - 4c - 12\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c-2=0 \\ \frac{1}{8}c^3 + \frac{1}{4}c^2 - 4c - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=2 & (n) \\ c=-4 & (l) \\ c=6 & (l) \end{cases}.$$

Vậy $C(2;1)$ là điểm thỏa đề bài.

Cách 2:

Gọi $C\left(c; \frac{1}{4}c^2\right) \in (P)$ $c \neq 6, c \neq -4$.

Ta gọi M là trung điểm của AB , suy ra $M\left(1; \frac{13}{2}\right)$.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $MC = \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền)

$$\text{Suy ra } (c-1)^2 + \left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}c^4 - \frac{9}{4}c^2 - 2c + 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}c^4 - \frac{1}{8}c^3 + \frac{1}{8}c^3 - \frac{1}{4}c^2 - 2c^2 + 4c - 6c + 12 = 0$$

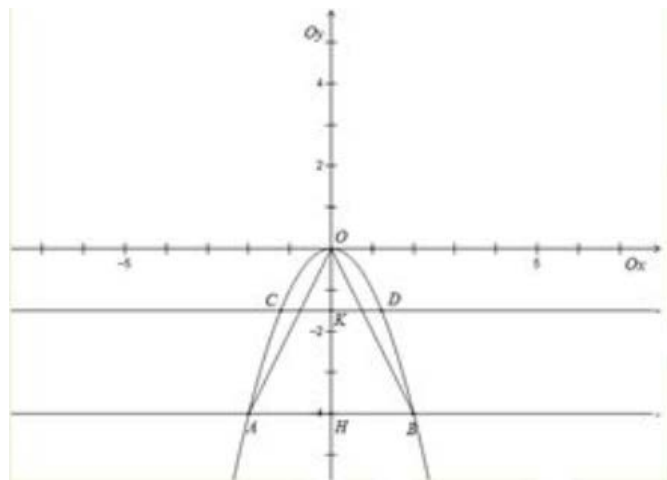
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}c^3(c-2) + \frac{1}{8}c^2(c-2) - 2c(c-2) - 6(c-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c-2)\left(\frac{1}{16}c^3 + \frac{1}{8}c^2 - 2c - 6\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & (n) \\ x=6 & (l) \\ x=-4 & (l) \end{cases}$$

Vậy điểm $C(2;1)$ là điểm thỏa đề bài.

Bài 45:

1). Đỉnh cổng là đỉnh của Parabol $y = ax^2$ ($a < 0$) trùng với gốc tọa độ $O(0; 0)$.



Gọi điểm biểu thị hai chân cổng trên đồ thị hàm số là A, B ta có A, B đối xứng qua trục tung và cách nhau 4 đơn vị. H là giao điểm của AB với Oy (A, B, H nằm phía dưới trục hoành).

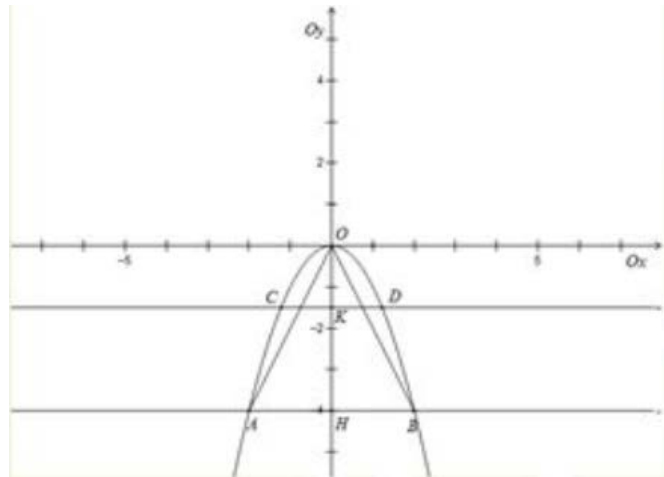
Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$, suy ra $H(0; -4)$ từ đây suy ra $A(-2; -4)$ và $B(2; -4)$.

Parabol $y = ax^2$ ($a < 0$) đi qua điểm A nên ta có $-4 = a(-2)^2 \Leftrightarrow -4 = 4a \Leftrightarrow a = -1$ (thỏa mãn), điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán này, thực chất là sử dụng các tính chất của hàm số, đặc biệt là hàm số bậc hai dạng $y = ax^2$ với $a \neq 0$, ngoài ra còn sử dụng các công thức liên quan đến khoảng cách, độ dài,...

Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Đồ thị hàm số $y = ax^2$ với $a < 0$ là một Parabol nhận gốc tọa độ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng, phần lõm hướng xuống dưới, ta được hình vẽ



Các điểm khác gốc tọa độ nằm trên parabol này đều ở phía dưới trục hoành.

- Định lý Py-ta-go: “Trong một tam giác vuông có tổng bình phương hai cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền).

Tam giác $\triangle OAH$ vuông tại H , áp dụng định lý Py-ta-go ta có $AH^2 + HO^2 = OA^2 \Leftrightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2 \Leftrightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$

$$\Leftrightarrow OH = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

- Một điểm nằm trên trục tung thì khoảng cách của điểm đó với gốc tọa độ bằng giá trị tuyệt đối tung độ của điểm đó.

Điểm H nằm trên trục tung và nằm phía dưới trục hoành nên điểm H có tung độ âm và hoành độ bằng 0.

Ta có $OH = |y_H| = -y_H$ do H nằm dưới trục hoành nên $y_H < 0$

$$\Leftrightarrow -y_H = 4 \Leftrightarrow y_H = -4 \Rightarrow H(0; -4)$$

suy ra $A(2; -4)$ và $B(-2; 4)$.

- Một điểm thuộc đồ thị hàm số thì khi thay giá trị hoành độ và tung độ của điểm đó vào hàm số ta được một phương trình đúng.

Điểm $A(2; -4)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$ nên ta có thay $x = 2$ và $y = -4$ vào hàm số ta được phương trình đúng $-4 = a.2^2 \Leftrightarrow 4a = -4 \Leftrightarrow a = -1$ (điều phải chứng minh).

2). Gọi giao điểm của đường biểu diễn chiều cao của xe tải với Parabol (P) tại C và D ($C; D$ nằm về hai phía của trục tung).

Ta có CD song song với AB và Ox .

K là giao điểm của CD và Oy .

Khoảng cách giữa DC và AB là 2,5 đơn vị nên suy ra $OK = 4 - 2,5 = 1,5$ khi đó ta có phương trình đường thẳng CD là $y = \frac{-3}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của CD và Parabol (P) là $-x^2 = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = \frac{-\sqrt{6}}{2} \\ x_D = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$.

Khi đó $CD = \sqrt{6}$. Tại độ cao 2,5 m thì chiều rộng của cổng là $\sqrt{6}m$ lớn hơn 2,4m là chiều rộng của xe tải nên xe tải có thể đi qua cổng.

Nhận xét: Vì chiều cao của xe tải thấp hơn chiều cao của cổng, để biết xe tải có thể đi qua cổng hay không ta phải xét xem, tại độ cao của cổng bằng với chiều cao của xe thì chiều rộng của cổng bằng bao nhiêu, nếu chiều rộng đó lớn hơn chiều rộng của xe tải thì xe tải sẽ đi qua, nếu nhỏ hơn chiều rộng xe tải thì không đi qua, nếu bằng nhau thì vì bài toán được xử lý trên lý thuyết nên ta chấp nhận là có đi qua.

Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Khoảng cách giữa hai điểm nằm trên một đường vuông góc với hai đường thẳng song song bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đó.

Ta có khoảng cách giữa CD và AB chính là chiều cao của xe tải nên bằng 2,5 khi đó $HK = 2,5 \Leftrightarrow OH - OK = 2,5 \Leftrightarrow 4 - OK = 2,5$

$$\Leftrightarrow OK = 4 - 2,5 = 1,5 \text{ suy ra } K(0; -1,5).$$

- Đường thẳng song song với trục hoành và đi qua một điểm nào đó thì chính tập hợp các điểm có tung độ là tung độ của điểm đó.

Ta có $CD \parallel Ox$ và CD đi qua điểm $K(0; -1,5)$ nên ta có hàm số biểu thị đường thẳng

$$CD \text{ là } y = -1,5 = -\frac{3}{2}.$$

- Phương trình hoành độ giao điểm/ Hệ phương trình tọa độ giao điểm.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng CD với parabol là

$$-x^2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_D = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_D = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

- Khoảng cách giữa hai điểm cùng thuộc một đường thẳng song song với trục hoành bằng giá trị tuyệt đối hiệu hai hoành độ của hai điểm.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } C \text{ và } D \text{ cùng thuộc } CD \parallel Ox \text{ nên } CD &= |x_c - x_D| = \left| -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right| \\ &= |-\sqrt{6}| = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

- Đối với bài toán trên, nếu tại độ cao của cổng bằng với chiều cao của xe thì chiều rộng của cổng bằng bao nhiêu, nếu chiều rộng đó lớn hơn chiều rộng của xe tải thì xe tải sẽ đi qua, nếu nhỏ hơn chiều rộng xe tải thì không đi qua, nếu bằng nhau thì vì bài toán được xử lý trên lý thuyết nên ta chấp nhận là có đi qua.

Ta có $\sqrt{6} > 2,4$ tức là chiều rộng của cổng tại độ cao 2,5 lớn hơn chiều rộng của xe tải nên xe tải đi qua được cổng.

Bài 46.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^2 = 2x - m + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ (1); Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 6 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Vì $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (P) nên $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1) và $y_1 = 2x_1 - m + 1, y_2 = 2x_2 - m + 1$

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = 2m - 2$. Thay y_1, y_2 vào $x_1 x_2 (y_1 + y_2) + 48 = 0$ có $x_1 x_2 (2x_1 + 2x_2 - 2m + 2) + 48 = 0 \Rightarrow (2m - 2)(10 - 2m) + 48 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn $m < 3$) hoặc $m = 7$ (không thỏa mãn $m < 3$)

Vậy $m = -1$ thỏa mãn đề bài

Bài 47

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-x^2 = (3 - m)x + 2 - 2m.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x + 2 - 2m = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (3 - m)^2 - 4(2 - 2m) = m^2 + 2m + 1$$

Viết được: $\Delta = (m + 1)^2 > 0$, với $m \neq -1$ và kết luận đúng.

b) Giải PT (1) được hai nghiệm: $x_1 = -2$ và $x_2 = m - 1$

Tính được: $y_1 = -4, y_2 = -(m - 1)^2$

$$|y_A - y_B| = |y_1 - y_2| = |m^2 - 2m - 3|$$

$$|y_A - y_B| = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 2 \text{ hoặc } m^2 - 2m - 3 = -2$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{6} \text{ hoặc } m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 48.

Phương trình hoành độ giao điểm: $ax^2 - bx - c = 0$.

Ta có $a; b; c$ là 3 cạnh của tam giác vuông nên $a > 0; b > 0; c > 0$

Ta thấy $a \cdot (-c) < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu, chứng tỏ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{-c}{a}$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c}{a} \stackrel{\text{Co-Sy}}{<} \frac{b^2 + a^2 + c^2}{a^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \quad (\text{do } a^2 = b^2 + c^2 \text{ định lý Pitago})$$

Bài 49.

a) Khi $m=1$, hoành độ giao điểm của (P) và (D) là nghiệm PT: $x^2 - 3x = 3x + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0, \text{ có } \Delta' = 36 + 2 = 38$$

$$\text{Vậy hoành độ các giao điểm là: } \frac{6 - \sqrt{38}}{2}, \frac{6 + \sqrt{38}}{2}$$

b) Hoành độ giao điểm của (P) và (D) là nghiệm PT: $x^2 - (2m^2 + 1)x + m - 1 = 3x + \frac{m}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4(m^2 + 2)x + m - 2 = 0 \quad (1)$$

PT (1) có: $\Delta' = 4(m^2 + 2)^2 - 2(m - 2)$, để (P) cắt (D) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0$ (2)

$$\text{Có: } (2) \Leftrightarrow 2(m^2 + 2)^2 - (m - 2) > 0 \Leftrightarrow 2m^4 + 8m^2 - m + 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^4 + 7m^2 + m^2 - 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 10 - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow 2m^4 + 7m^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0, \text{ đúng với mọi } m.$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là hoành độ giao điểm của (P) và (D) ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m^2 + 2) & (3) \\ x_1 x_2 = \frac{m - 2}{2} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Để } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}, \text{ từ (3) và (4) suy ra: } m \geq 2.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là: $m \geq 2$

Bài 50.

+ Pt hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (1)

+ (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - (m^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1(*)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) & (1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 3 & (2) \\ x_1 + x_2 - \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{57}{4} & (3) \end{cases}$$

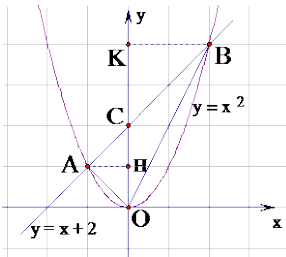
Thế pt (1), (2) vào (3) ta có

$$4.4(m+3)^2 - 4(m^2+3) - 57.2(m+3) = 0; (m \neq -3)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 & (n) \\ m = -3,5 & (l) \end{cases}$$

+ **Kết luận:** giá trị cần tìm $m = 5$.

Bài 51.



$$S(\triangle OAB) = S(\triangle OAC) + S(\triangle OBC)$$

$$S(\triangle OAC) = \frac{1}{2} AH \cdot OC = 1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S(\triangle OBC) = \frac{1}{2} BK \cdot OC = 2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S(\triangle OAB) = 3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 52.

a) Để hàm số là hàm số bậc nhất nghịch biến thì:

$$m - 3 < 0 \text{ suy ra } m < 3$$

b) Khi đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1; 1)$ ta có :

$$(m - 3) \cdot 1 + 2 + m = 1 \Rightarrow m = 1$$

c) Đồ thị cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

Để đồ thị cắt 2 trục tọa độ: Cắt Ox tại $A(x_A; 0)$ và cắt Oy tại $B(0; y_B)$ thì điều kiện $m \neq 3$

$$\text{Thay tọa độ điểm A ta có: } (m - 3)x_A + 2 + m = 0 \Rightarrow x_A = \frac{-(2 + m)}{m - 3}$$

Thay tọa độ điểm B ta có: $y_B = 2 + m$ (có thể tính OA, OB theo x_A và y_B)

$$\text{Ta có tam giác OAB vuông tại O nên diện tích } S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |x_A| \cdot |y_B| = 3$$

$$\Rightarrow |x_A| \cdot |y_B| = 6$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-(2 + m)}{m - 3} \right| \cdot |2 + m| = 6 \Rightarrow \left| \frac{-(2 + m)}{m - 3} \cdot (2 + m) \right| = 6 \Rightarrow \left| \frac{-(2 + m)^2}{m - 3} \right| = 6$$

$$\text{TH1: } \frac{-(2 + m)^2}{m - 3} = 6 \Rightarrow -(2 + m)^2 = 6(m - 3) \Leftrightarrow m^2 + 10m - 14 = 0$$

$$\Delta' = 5^2 - (-14) = 39 > 0 \Rightarrow m_{1,2} = -5 \pm \sqrt{39}$$

$$\text{TH2: } \frac{-(2 + m)^2}{m - 3} = -6 \Rightarrow -(2 + m)^2 = -6(m - 3) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 22 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 22 = -21 < 0 \Rightarrow m \in \emptyset$$

Vậy giá trị tìm được : $m_{1,2} = -5 \pm \sqrt{39}$

Bài 53.

a/ Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P): $ax^2 = 2x - a^2$ ($a > 0$)

Lý luận (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta' = 1 - a^3 > 0$

$\Delta' = (1-a)(1+a+a^2) > 0 \Leftrightarrow a < 1$ (vì $1+a+a^2 > 0, \forall a$) K luận $0 < a < 1$

Theo Đlý Viet ta có $S = x_1 + x_2 = 2/a$; $P = x_1 \cdot x_2 = a$

do $0 < a < 1$ nên $x_1 > 0$; $x_2 > 0$

do $x_1 > 0$; $x_2 > 0$, nên hai điểm A; B nằm về bên phải trục tung

$$b/ M = \frac{4}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{4}{\frac{2}{a}} + \frac{1}{a}$$

$$M = 2a + \frac{1}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$$

Vậy GTNN của M là $2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $2a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 54.

1) Ta có $y = |x-2| + |2x+1| + ax$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} 2-x-2x-1+ax; & x < -\frac{1}{2} \\ 2-x+2x+1+ax; & -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ x-2+2x+1+ax; & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} (a-3)x+1; & x < -\frac{1}{2} \\ (a+1)x+3; & -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ (a+3)x-1; & x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy hàm (C) luôn đồng biến khi: $\begin{cases} a > 3 \\ a > -1 \\ a > -3 \end{cases} \Leftrightarrow a > 3$

2) + Vì đồ thị đi qua điểm B(1; 6) nên ta có:

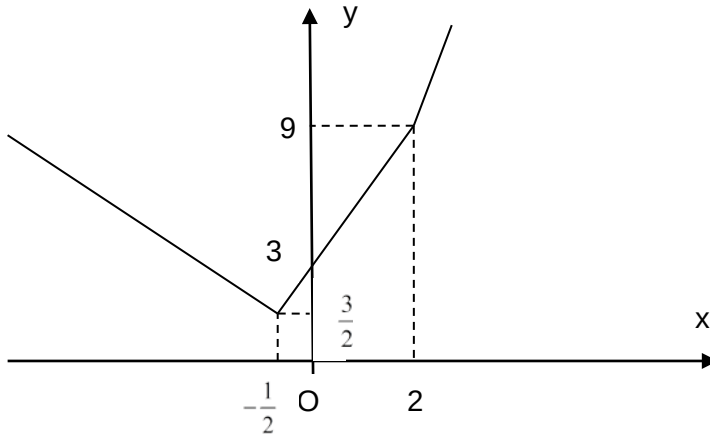
$$6 = |1-2| + |2 \cdot 1 + 1| + a \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Vậy $a = 2$ thì đồ thị đi qua điểm B(1; 6)

$$+ \text{Với } a = 2 \text{ thì } y = \begin{cases} -x+1; & x < -\frac{1}{2} \\ 3x+3; & -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ 5x-1; & x \geq 2 \end{cases} \quad (C)$$

Đồ thị được vẽ như sau:



3) Ta có: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = x + m$

$$\Leftrightarrow |x-2| + |2x+1| + 2x = 3x + m \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) chính là số giao điểm của đường thẳng $y = 3x + m$ và đồ thị $y = |x-2| + |2x+1| + 2x$. Ta thấy $y = 3x + m$ là đường thẳng song song với đường thẳng $y = 3x + 3$. Dựa vào đồ thị hàm số đã vẽ ở ý 2/ ta có:

+ $m < 3$ thì PT vô nghiệm.

+ $m = 3$ thì PT có vô số nghiệm.

+ $m > 3$ thì PT có 2 nghiệm.

Bài 55.

1) Với $k = -2$ ta có đường thẳng (d): $y = -3x + 4$

Khi đó phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = -3x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

Do $a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = -4$

Với $x = 1$ có $y = 1$

Với $x = -4$ có $y = 16$

Vậy khi $k = -2$ đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm có tọa độ là $(1; 1); (-4; 16)$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = (k - 1)x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (k - 1)x - 4 = 0$$

Ta có $ac = -4 < 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của k .

Vậy đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

3) Với mọi giá trị của k ; đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 1 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

Khi đó: $y_1 = x_1^2$; $y_2 = x_2^2$

Vậy $y_1 + y_2 = y_1 y_2$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (x_1 x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)^2 + 8 = 16$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow k = 1 + 2\sqrt{2} \text{ hoặc } k = 1 - 2\sqrt{2}$$

Vậy $k = 1 + 2\sqrt{2}$ hoặc $k = 1 - 2\sqrt{2}$ thỏa mãn đầu bài.

Bài 56.

$$1/ \text{ P.trình hoành độ giao điểm (P) và (d) : } x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = m \end{cases}$$

Vì giao điểm $\in (P): y = x^2 \Rightarrow y = m^2$. Với $y = 9 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow (m = 3 \vee m = -3)$

Vậy với $m = \pm 3$ thì (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2/ Từ câu 1 $\Rightarrow$ (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi $m \neq 0$.

Khi đó giao điểm thứ nhất là gốc tọa độ O ($x = 0; y = 0$), giao điểm thứ 2 là điểm A có ($x = m; y = m^2$).

$$\text{Khoảng cách giữa hai giao điểm : } AO = \sqrt{m^2 + m^4} = \sqrt{6} \Leftrightarrow m^4 + m^2 - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = m^2; (t \geq 0) \quad (1) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t_1 = 3 \text{ (nhận) } \vee t_2 = -2 \text{ (loại)})$$

$$\text{Với } t_1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 3, \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3} \text{ (nhận)}$$

Vậy với $m = \pm\sqrt{3}$ thì (P) cắt (d) tại hai điểm có khoảng cách bằng $\sqrt{6}$.

Bài 57.

a) Khi $m = 1$ ta có d : $y = 2x - 1$ và (P): $y = -x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

$$\text{Với } x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Với } x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2}$$

Vậy các giao điểm là $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $-x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Áp dụng Viét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2|$$

$$\Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| = |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]|$$

$$= |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4|m(2m^2 + 1)| |x_1 - x_2| = 4|m|(2m^2 + 1)2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{Ta có } |y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$$

$$\text{Đặt } m^4 + m^2 = t \geq 0 \text{ có phương trình } 64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{16} \text{ (vì } t \geq 0)$$

$$\text{Suy ra } m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \pm \frac{1}{2}$$