

PHÉP NHÂN VÀ CHIA
CÁC ĐA THỨC

§1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

§2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích với nhau.

Nếu kí hiệu các đơn thức bởi các chữ $A, B, C, D, \dots$ thì có thể viết gọn quy tắc trên như sau:

$$A.(B + C) = A.B + A.C$$

2. Phép nhân đơn thức với đa thức tương tự như phép nhân của một số với một tổng và chú ý đến dấu của từng đơn thức tham gia phép toán để đặt dấu “+” hoặc “-” cho thích hợp:

$$A.(B + C - D) = A.B + A.C - A.D$$

Ví dụ: $3x^2.(4x^2 - x + 1) = 12x^4 - 3x^3 + 3x^2$

3. Muốn nhân một đa thức với một đa thức ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau:

$$(A + B).(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

4. Phép nhân hai đa thức là tổng các kết quả nhân từng đơn thức của đa thức này với đa thức kia.

$$\begin{aligned}(A + B).(C + D - E) &= A.(C + D - E) + B.(C + D - E) \\ &= AC + AD - AE + BC + BD - BE\end{aligned}$$

Ví dụ:

$$\begin{aligned}(2x + 1).(x^3 - 2x - 1) &= 2x.(x^3 - 2x - 1) + 1.(x^3 - 2x - 1) \\ &= 2x^4 - 4x^2 - 2x + x^3 - 2x - 1 \\ &= 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 1\end{aligned}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. LÀM TÍNH NHÂN

Phương pháp giải

Áp dụng các quy tắc nhân đơn thức với đa thức và nhân đa thức với đa thức

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD.$$

Chú ý các phép tính về lũy thừa

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$(a^n)^m = a^{nm};$$

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

Ví dụ 1. (Bài 1, trang 5 SGK)

Làm tính nhân :

$$\text{a) } x^2 \left(5x^3 - x - \frac{1}{2} \right); \quad \text{b) } (3xy - x^2 + y) \frac{2}{3} x^2 y; \quad \text{c) } (4x^3 - 5xy + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} xy \right).$$

Giải

Áp dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức, ta có:

$$\text{a) } x^2 \left(5x^3 - x - \frac{1}{2} \right) = x^2 \cdot 5x^3 - x^2 \cdot x - x^2 \cdot \frac{1}{2} = 5x^5 - x^3 - \frac{1}{2} x^2;$$

$$\text{b) } (3xy - x^2 + y) \frac{2}{3} x^2 y = 3xy \cdot \frac{2}{3} x^2 y - x^2 \cdot \frac{2}{3} x^2 y + y \cdot \frac{2}{3} x^2 y = 2x^3 y^2 - \frac{2}{3} x^4 y + \frac{2}{3} x^2 y^2;$$

$$\text{c) } (4x^3 - 5xy + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} xy \right) = -2x^4 y + \frac{5}{2} x^2 y^2 - x^2 y.$$

Ví dụ 2. (Bài 7, trang 8 SGK)

Làm tính nhân :

$$\text{a) } (x^2 - 2x + 1)(x - 1); \quad \text{b) } (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x).$$

Từ câu b) hãy suy ra kết quả của phép nhân $(x^3 - 2x^2 + x + 1)(x - 5)$.

Giải:

a) Thực hiện phép nhân đa thức với đa thức ta có:

$$(x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^2(x - 1) - 2x(x - 1) + 1 \cdot (x - 1)$$

$$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{b) } (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x) = x^3(5 - x) - 2x^2(5 - x) + x(5 - x) - 1 \cdot (5 - x)$$

$$= 5x^3 - x^4 - 10x^2 + 2x^3 + 5x - x^2 - 5 + x$$

$$= -x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5.$$

Vì $x - 5 = -(5 - x)$ nên :

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x - 5) = -(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x)$$

$$= -(-x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5)$$

$$= x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 6x + 5.$$

Ví dụ 3. (Bài 8, trang 8 SGK)

Làm tính nhân :

$$\text{a) } \left(x^2 y^2 - \frac{1}{2} xy + 2y \right) (x - 2y); \quad \text{b) } (x^2 - xy + y^2)(x + y).$$

Giải:

$$\text{a) } \left(x^2 y^2 - \frac{1}{2} xy + 2y \right) (x - 2y) = x^3 y^2 - 2x^2 y^3 - \frac{1}{2} x^2 y + xy^2 + 2xy - 4y^2.$$

$$\text{b) } (x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + x^2 y - x^2 y - xy^2 + y^2 x + y^3 = x^3 + y^3.$$

Ví dụ 4. (Bài 10, trang 8 SGK)

Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } (x^2 - 2x + 3) \left(\frac{1}{2} x - 5 \right); \quad \text{b) } (x^2 - 2xy + y^2)(x - y).$$

Giải:

$$\text{a) Ta có } (x^2 - 2x + 3) \left(\frac{1}{2} x - 5 \right) = \frac{1}{2} x^3 - 5x^2 - x^2 + 10x + \frac{3}{2} x - 15$$

$$= \frac{1}{2} x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2} x - 15.$$

$$\text{b) } (x^2 - 2xy + y^2)(x - y) = x^3 - x^2 y - 2x^2 y + 2xy^2 + y^2 x - y^3$$

$$= x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3.$$

Ví dụ 5. (Bài 15, trang 9 SGK)

Làm tính nhân :

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} x + y \right) \left(\frac{1}{2} x + y \right); \quad \text{b) } \left(x - \frac{1}{2} y \right) \left(x - \frac{1}{2} y \right).$$

Giải:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2} x + y \right) \left(\frac{1}{2} x + y \right) = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} yx + y^2 = \frac{1}{4} x^2 + xy + y^2.$$

$$\text{b) } \left(x - \frac{1}{2} y \right) \left(x - \frac{1}{2} y \right) = x^2 - \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} yx + \frac{1}{4} y^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4} y^2.$$

DẠNG 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

* Dựa vào quy tắc nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức ta rút gọn biểu thức.

* Thay các giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn.

Ví dụ 6. (Bài 2, trang 5 SGK)

Thực hiện phép nhân rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $x(x - y) + y(x + y)$ tại $x = -6$ và $y = 8$.

b) $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = -100$.

Giải:

a) Trước hết ta rút gọn biểu thức:

$$x(x - y) + y(x + y) = x^2 - xy + yx + y^2 = x^2 + y^2.$$

Thay giá trị $x = -6$; $y = 8$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$x^2 + y^2 = (-6)^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100.$$

b) $(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x) = x^3 - xy - x^3 - x^2y + yx^2 - yx = -2xy$.

Thay giá trị $x = \frac{1}{2}$, $y = -100$ vào biểu thức đã rút gọn ta được:

$$-2xy = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-100) = 100.$$

Ví dụ 7. (Bài 6, trang 6 SGK)

Điền dấu x vào ô mà em cho là đáp số đúng.

Giá trị của biểu thức $ax(x - y) + y^3(x + y)$ tại $x = -1$ và $y = 1$ (a là hằng số) là:

a	
$-a + 2$	
$-2a$	
$2a$	

Giải

Ta có: $ax(x - y) + y^3(x + y) = ax^2 - axy + xy^3 + y^4$.

Thay $x = -1$ và $y = 1$ vào ta được:

$$a(-1)^2 - a(-1)(1) + (-1) \cdot 1^3 + 1^4 = a + a - 1 + 1 = 2a.$$

a	
$-a + 2$	
$-2a$	
$2a$	x

Ví dụ 8. (Bài 9, trang 8 SGK)

Điền kết quả tính được vào bảng:

Giá trị của x và y	Giá trị của biểu thức $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
------------------------	--

$x = -10; y = 2$	
$x = -1; y = 0$	
$x = 2; y = -1$	
$x = -0,5; y = 1,25$ (trường hợp này có thể dùng máy tính bỏ túi để tính)	

Lời giải

Rút gọn biểu thức ta được

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) - x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3.$$

Ta có kết quả sau:

Giá trị của x và y	Giá trị của biểu thức $x^3 - y^3$
$x = -10; y = 2$	-1008
$x = -1; y = 0$	-1
$x = 2; y = -1$	9
$x = -0,5; y = 1,25$ (trường hợp này có thể dùng máy tính bỏ túi để tính)	-2,078125

Ví dụ 9. (Bài 12, trang 8 SGK)

Tính giá trị của biểu thức $(x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $x = 0$ b) $x = 15$ c) $x = -15$ d) $x = -0,15$.

Lời giải

Rút gọn biểu thức ta được:

$$\begin{aligned} (x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2) &= x^3 + 3x^2 - 5x - 15 + x^2 - x^3 + 4x - 4x^2 \\ &= -x - 15 \end{aligned}$$

Kết quả được tính theo bảng sau

Giá trị của x	Giá trị của biểu thức $-x - 15$
$x = 0$	-15
$x = 15$	-30

$x = -15$	0
$x = -0,15$	-15,15

Dạng 3. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp giải

Áp dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức, nhân đa thức với đa thức rồi rút gọn biểu thức.

Ví dụ 10. (Bài 5, trang 6 SGK)

Rút gọn biểu thức:

a) $x(x - y + y(x - y))$ b) $x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1})$

Giải

a) $x(x - y) + y(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$

b) $x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + x^{n-1}y - yx^{n-1} - y^n = x^n - y^n.$

Dạng 4. TÌM x THỎA MÃN ĐẲNG THỨC CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Thực hiện phép nhân đa thức, biến đổi và rút gọn để đưa đẳng thức đã cho về dạng $ax = b$.
- Tìm được $x = \frac{b}{a}$ (nếu $a \neq 0$)

Ví dụ 11. (Bài 3, trang 5 SGK)

Tìm x , biết

a) $3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 30$

b) $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$

Giải

a) Rút gọn biểu thức ở vế trái ta có

$$3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 36x^2 - 12x - 36x^2 + 27x = 15x$$

Đẳng thức đã cho trở thành: $15x = 30$. Vậy $x = \frac{15}{3} = 5$.

Ví dụ 12. (Bài 3, trang 9 SGK)

Tìm x , biết $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$

Giải

Thực hiện phép tính ở vế trái, ta có

$$(12x-5)(4x-1)+(3x-7)(1-16x)$$

$$48x^2-12x-20x+5+3x-48x^2-7+112x=83x-2$$

Đẳng thức đã cho trở thành: $83x-2=81$, tức là $83x=83$ hay $x=1$.

Dạng 5. CHỨNG MINH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO GIÁ TRỊ CỦA BIẾN

Phương pháp giải

- Ta biến đổi biểu thức đã cho thành một biểu thức không còn chứa biến x .
- Để kiểm tra kết quả tìm được ta thử thay một giá trị của biến (chẳng hạn $x=0$) vào biểu thức rồi so sánh kết quả.

Ví dụ 13. (Bài 11, trang 8 SGK)

Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$(x-5)(2x+3)-2x(x-3)+x+7$$

Giải

Thực hiện phép nhân đa thức và rút gọn ta được

$$(x-5)(2x+3)-2x(x-3)+x+7$$

$$=2x^2+3x-10x-15-2x^2+6x+x+7=-8$$

Giá trị biểu thức trên luôn bằng -8 với mọi giá trị của biến x . Vậy giá trị biểu thức đã cho không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

Chú ý: Nếu thay $x=0$ vào biểu thức đã cho ta được $-5.3+7=-8$

Dạng 6. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN x

Phương pháp giải

- Chọn ẩn x và xác định điều kiện cho ẩn.
- Dựa vào đề bài để tìm đẳng thức có chứa x .
- Giải tìm x và chọn kết quả thích hợp.

Ví dụ 14. (Bài 14, trang 9 SGK)

Tìm 3 số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

Giải

Gọi $x, x+2, x+4$ là ba số chẵn liên tiếp phải tìm (x là số tự nhiên chẵn)

Tích hai số đầu là: $x(x+2)$

Tích hai số sau là: $(x+2)(x+4)$.

Theo đề bài ta có $(x+2)(x+4)-x(x+2)=192$

Rút gọn vế trái của đẳng thức ta được:

$$(x+2)(x+4) - x(x+2) = x^2 + 4x + 2x + 8 - x^2 - 2x = 4x + 8$$

Khi đó ta có: $4x + 8 = 192 \Rightarrow 4x = 184 \Rightarrow x = 46$

Vậy ba số chẵn liên tiếp cần tìm là 46, 48, 50

Ví dụ 15. (Bài 4 trang 5 SGK)

Đố đoán tuổi. Bạn hãy lấy tuổi của mình:

- Cộng thêm 5
- Được bao nhiêu đem nhân với 2
- Lấy kết quả vừa tìm được cộng với 10
- Nhân kết quả vừa tìm được với 5
- Đọc kết quả cuối cùng sau khi đã trừ cho 100

Tôi sẽ đoán được tuổi của bạn. Giải thích tại sao ?

Giải

Giả sử tuổi của bạn là x .

Lấy tuổi đó cộng thêm 5 được: $x + 5$

Sau đó đem nhân với 2 được: $2(x + 5) = 2x + 10$

Lấy kết quả trên cộng với 10: $(2x + 10) + 10 = 2x + 20$

Nhân kết quả vừa tìm được với 5: $(2x + 20).5 = 10x + 100$

Đọc kết quả cuối cùng sau khi trừ đi 100 được. $(10x + 100) - 100 = 10x$.

Vậy tuổi của bạn bằng kết quả đọc cuối cùng chia cho 10

Dạng 7. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Để chứng minh một đẳng thức ta có thể áp dụng một trong các cách sau :

- Biến đổi vế trái (VT) bằng vế phải (VP) hoặc biến đổi VP bằng VT.
- Biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức.
- Chứng minh hiệu của VT và VP bằng 0.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng :

a) $(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + y^3$

b) $(x^2 + xy + y^2)(x - y) = x^3 - y^3$

Giải

a) Thực hiện phép nhân đa thức ở vế trái và rút gọn ta có :

$$(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + y^2x + y^3 = x^3 + y^3$$

b) $(x^2 + xy + y^2)(x - y) = x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 + xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

Ví dụ 17. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Giải

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế phải, ta có :

$$\begin{aligned} & (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z + yx^2 + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + \\ & \quad + zx^2 + zy^2 + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Dạng 8. ÁP DỤNG VÀO SỐ HỌC

Phương pháp giải:

- Phép chia hết : Cho hai số nguyên a và b ($b \neq 0$), ta nói a chia hết cho b , kí hiệu là $a:b$ nếu có số nguyên q sao cho $a = b.q$, ta còn nói b là ước của a .
- Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a chia hết cho c .

Ví dụ 18. Chứng minh rằng :

- $35^{2003} - 35^{2004}$ chia hết cho 17.
- $43^{2004} + 43^{2005}$ chia hết cho 11.
- $27^3 + 9^5$ chia hết cho 4.

Giải

- Ta có: $35^{2003} - 35^{2004} = 35^{2004} (35 - 1) = 34.35^{2004}$. Vì $34 = 2.17$ chia hết cho 17 nên 34.35^{2004} chia hết cho 17.
- $43^{2004} + 43^{2005} = 43^{2004} (1 + 43) = 44.43^{2004}$. Vì $44 = 4.11$ chia hết cho 11 nên 44.43^{2004} chia hết cho 11).
- $27^3 + 9^5 = 3^9 + 3^{10} = 3^9 (1 + 3) = 4.3^9$ chia hết cho 4.

Ví dụ 19: Chứng minh rằng $(2m - 3)(3n - 2) - (3m - 2)(2n - 3)$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên m, n

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (2m - 3)(3n - 2) - (3m - 2)(2n - 3) = \\ &= 6mn - 4m - 9n + 6 - 6mn + 9m + 4n - 6 = 5m - 5n = 5(m - n) \text{ chia hết cho 5.} \end{aligned}$$

Dạng 9. ĐA THỨC ĐỒNG NHẤT BẰNG NHAU

Phương pháp giải

- Hai đa thức của cùng một biến số x gọi là đồng nhất bằng nhau nếu chúng luôn nhận cùng một giá trị đối với mỗi giá trị của biến số x , kí hiệu là $f(x) \equiv g(x)$

Vậy $f(x) \equiv g(x)$ khi $f(x) = g(x)$ với mọi x

- Hai đa thức đồng nhất đồng nhất bằng nhau nếu các hệ số tương ứng của chúng bằng nhau và ngược lại.

Chẳng hạn cho $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ và $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. Nếu $f(x) \equiv g(x)$ thì $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$

- Một đa thức đồng nhất bằng 0 khi đa thức đó có các hệ số đều bằng 0 và ngược lại.

Ví dụ 20. Xác định a, b, c, d thỏa một trong các đẳng thức sau với mọi giá trị của x :

$$a) (ax+b)(x^2+cx+1) = x^3 - 3x + 2$$

$$b) x^4 + ax^2 + b = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + cx + d)$$

Giải

a) Thực hiện phép nhân đa thức và rút gọn vế trái ta được:

$$\begin{aligned} (ax+b)(x^2+cx+1) &= ax^3 + acx^2 + ax + bx^2 + bcx + b \\ &= ax^3 + (ac+b)x^2 + (a+bc)x + b \end{aligned}$$

Vậy ta có hai đa thức đồng nhất sau:

$$ax^3 + (ac+b)x^2 + (a+bc)x + b = x^3 - 3x + 2$$

Suy ra

$$\begin{cases} a = 1 \\ ac + b = 0 \\ a + bc = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

b) Biến đổi vế phải ta được:

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 2)(x^2 + cx + d) &= x^4 + cx^3 + dx^2 - 3x^3 - 3cx^2 - 3dx + 2x^2 + 2cx + 2d \\ &= x^4 + (c-3)x^3 + (d+2-3c)x^2 + (2c-3d)x + 2d. \end{aligned}$$

Vậy ta có hai đa thức đồng nhất sau:

$$x^4 + ax^2 + b = x^4 + (c-3)x^3 + (d+2-3c)x^2 + (2c-3d)x + 2d. \text{ Suy ra: } \begin{cases} c-3=0 & (1) \\ d+2-3c=a & (2) \\ 2c-3d=0 & (3) \\ 2d=b & (4) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $c = 3$, thay $c = 3$ vào (3) ta được $d = 2$.

Từ (4) suy ra $b = 4$, thay $c = 3, b = 4, d = 2$ vào (2) ta được $a = -5$.

Vậy $a = -5, b = 4, c = 3, d = 2$.

Ví dụ 21. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx$. Xác định a, b để $f(x) - f(x-1) = x$ với mọi giá trị của x . Từ đó suy ra công thức tính tổng $1 + 2 + \dots + n$ (với n là số nguyên dương).

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x-1) &= a(x-1)^2 + b(x-1) = a(x-1)(x-1) + b(x-1) \\ &= a(x^2 - 2x + 1) + bx - b = ax^2 + (b - 2a)x + a - b \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } f(x) - f(x-1) = 2ax + b - a.$$

Vậy ta có hai đa thức đồng nhất: $2ax + b - a \equiv x$. Suy ra:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

Trong đẳng thức $f(x) - f(x-1) = x$ lần lượt thay $x = 1, 2, 3, \dots, n$ ta được:

$$f(1) - f(0) = 1;$$

$$f(2) - f(1) = 2;$$

$$f(3) - f(2) = 3; \quad \dots\dots$$

$$f(n) - f(n-1) = n.$$

Cộng các đẳng thức trên và rút gọn thì được:

$$f(n) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \text{ và } f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \text{ nên:}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Làm tính nhân:

$$\text{a) } 2x(7x^2 - 5x - 1)$$

$$\text{b) } (x^2 + 2xy - 3)(-xy);$$

$$\text{c) } -2x^3y(2x^2 - 3y + 5yz)$$

$$\text{d) } (3x^{n+1} - 2x^n).4x^2.$$

2. (Dạng 1). Làm tính

$$\text{a) } \left(3x^{2m-1} - \frac{3}{7}y^{3n-5} + x^{2m}y^{3n} - 3y^2 \right) 8x^{3-2m}y^{6-3n} ($$

$$\text{b) } (2x^{2n} + 3x^{2n-1})(x^{1-2n} - 3x^{2-2n})$$

3. (Dạng 2). Tính giá trị của các biểu thức:

$$\text{a) } 5x(4x^2 - 2x + 1) - 2x(10x^2 - 5x - 2) \text{ với } x = 15;$$

b) $5x(x-4y)-4y(y-5x)$ với $x=-\frac{1}{5}; y=-\frac{1}{2}$

c) $6xy(xy-y^2)-8x^2(x-y^2)+5y^2(x^2-xy)$ với $x=-\frac{1}{2}; y=2$

4. (Dạng 2). Cho các đa thức $A=-2x^2+3x+5$ và $B=x^2-x+3$.

a) Tính A, B ;

b) Tính giá trị của các biểu thức A, B và $A.B$ khi $x=-3$.

5. (Dạng 3). Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x(2x^2-3)-x^2(5x+1)+x^2$;

b) $3x(x-2)-5x(1-x)-8(x^2-3)$.

6. (Dạng 4). Tìm x (hoặc y), biết:

a) $2x(x-5)-x(2x+3)=26$;

b) $(8y^2-y+1)(y+1)+y^2(4-3y)=-\frac{5}{2}$

c) $2x^2+3(x-1)(x+1)=5x(x+1)$.

7. (Dạng 5). Chứng minh rằng các giá biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

a) $x(x^2+x+1)-x^2(x+1)-x+5$;

b) $x(2x+1)-x^2(x+2)+x^3-x+3$;

c) $4(6-x)+x^2(2+3x)-x(5x-4)+3x^2(1-x)$.

8. (Dạng 6). Có hai hình chữ nhật. Hình thứ nhất có chiều dài hơn chiều rộng $9m$. Hình thứ hai có chiều rộng hơn chiều rộng hình thứ nhất là $5m$ và có chiều dài hơn chiều dài hình thứ nhất là $15m$. Biết diện tích hình thứ hai hơn diện tích hình thứ nhất là $640m^2$. Tính kích thước của mỗi hình.

9. (Dạng 7). Chứng minh rằng:

a) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$;

b) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)=x^4-y^4$;

c) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$;

d) $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$.

10. (Dạng 7). Chứng minh rằng nếu $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ thì

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2.$$

11. (Dạng 8). Cho a và b là hai số tự nhiên. Biết a chia cho 5 dư 2 và b chia cho 5 dư 3. Chứng minh rằng ab chia cho 5 dư 1.

12. (Dạng 8).

a) Chứng minh rằng biểu thức $n(2n-3)-2n(n+1)$ luôn chia hết cho 5 với mọi n là số nguyên.

b) Chứng minh rằng: $(n-1)(n+4)-(n-4)(n+1)$ luôn chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

13. (Dạng 9). Xác định a, b, c, d biết:

a) $(ax^2 + bx + c)(x + 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$ với mọi x ;

b) $x^4 + x^3 - x^2 + ax + b = (x^2 + x - 2)(x^2 + cx + d)$ với mọi x .

14. (Dạng 9). Cho đa thức: $f(x) = x(x+1)(x+2)(ax+b)$.

a) Xác định a, b để $f(x) - f(x-1) = x(x+1)(2x+1)$ với mọi x

b) Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.5 + \dots + n(n+1)(2n+1)$ theo n (với n là số nguyên dương).

15. (Dạng 9). Xác định a, b, c để

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x-a)(x-b)(x-c) \text{ với mọi } x .$$

§3. §4. §5. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. Bình phương của một tổng: | $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. |
| 2. Bình phương của một hiệu: | $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$. |
| 3. Hiệu hai bình phương: | $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. |
| 4. Lập phương của một tổng: | $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. |
| 5. Lập phương của một hiệu: | $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$. |
| 6. Tổng hai lập phương: | $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$. |

Dạng 1. ỨNG DỤNG CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ ĐỂ TÍNH

Phương pháp giải

Đưa về một trong bảng hằng đẳng thức đáng nhớ ở phần A để tính.

Ví dụ 1: (Bài 19, trang 12 SGK)

Đố. Tính diện tích hình còn lại mà không cần đo.

Một miếng tôn hình vuông có cạnh bằng $a+b$, bác thợ cắt một miếng của hình vuông có cạnh bằng $a-b$ (cho $a > b$). Diện tích hình còn lại là bao nhiêu? Diện tích phần còn lại có phụ thuộc vào vị trí cắt không?

Giải

Diện tích hình vuông có cạnh bằng $a+b$ là: $(a+b)^2$.

Diện tích hình vuông có cạnh bằng $a-b$ là: $(a-b)^2$.

Diện tích hình còn lại là:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a+b-a+b)(a+b+a-b) = 2b \cdot 2a = 4ab.$$

Diện tích hình còn lại không phụ thuộc vào vị trí cắt.

Ví dụ 2: (Bài 25 trang 13 SGK)

a) $(a+b+c)^2$; b) $(a+b-c)^2$ c) $(a-b-c)^2$.

Giải

a) Ta có: $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b).c + c^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

b) Tương tự: $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$.

c) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$.

Ví dụ 3. (Bài 26 trang 14 SGK)

Tính: a) $(2x^2 + 3y)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$

Giải

a) Ta có: $(2x^2 + 3y)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(3y) + 3(2x^2).(3y)^2 + (3y)^3$
 $= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3$.

b) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$

Ví dụ 4. (Bài 33, trang 16 SGK). Tính

a) $(2+xy)^2$;

b) $(5-3x)^2$;

c) $(5-x^2)(5+x^2)$;

d) $(5x-1)^3$;

e) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$;

f) $(x+3)(x^2-3x+9)$;

Giải

a) $(2+xy)^2 = 4 + 4xy + x^2y^2$;

$$b) (5-3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2 ;$$

$$c) (5-x^2)(5+x^2) = 25 - x^4 ;$$

$$d) (5x-1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1;$$

$$e) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3 ;$$

$$a) (x+3)(x^2-3x+9) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$$

Dạng 2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi vế trái bằng vế phải hoặc vế phải bằng vế trái.

Ví dụ 5. (Bài 17, trang 11 SGK).

Chứng minh: $(10a+5)^2 = 100a(a+1) + 25$. Từ đó em hãy nêu cách tính nhẩm bình phương của một số có tận cùng bằng chữ số 5. Áp dụng để tính $25^2, 35^2, 65^2, 75^2$

Giải

Biến đổi vế trái ta có:

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25.$$

Bình phương của một số có tận cùng bằng chữ số 5 là một số có hai chữ số tận cùng bằng 25 và số trăm bằng tích số chục của số đem bình phương với số liền sau.

Áp dụng: $25^2 = 625$; $35^2 = 1225$; $65^2 = 4225$; $75^2 = 5625$;

Ví dụ 6. (Bài 20, trang 12 SGK)

Nhận xét sự đúng sai của kết quả sau:

$$“x^2 + 2xy + y^2 = (x+2y)^2”$$

Giải

$$\text{Kết quả trên sai vì } (x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

Ví dụ 7. (Bài 23, trang 12 SGK)

$$\text{Chứng minh rằng: } (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab ;$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab ;$$

Áp dụng: a) Tính $(a-b)^2$ biết $a+b=7; ab=12$.

b) Tính $(a+b)^2$ biết $a-b=20; ab=3$.

Giải

Biến đổi vế phải ta được:

$$(a-b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 ; \quad (1)$$

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 ; \quad (2)$$

Áp dụng:

a) Thay $a+b=7, ab=12$ vào (2) ta được:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 7^2 - 4.12 = 49 - 48 = 1.$$

b) Thay $a-b=20, ab=3$ vào (1) ta được:

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 20^2 + 4.3 = 412.$$

Ví dụ 8. (Bài 31, trang 17 SGK)

Chứng minh rằng:

a) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b);$

b) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b);$

Giải

a) Biến đổi vế phải ta được:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 - 3ab(a+b) &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 ; \end{aligned} \quad (1)$$

b) $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2$
 $= a^3 - b^3 ;$

Áp dụng: Thay $a+b=-5$ và $ab=6$ vào (1) ta được:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a(a+b) = (-5)^3 - 3.6(-5) = -125 + 90 = -35$$

Ví dụ 9. (Bài 38 trang 18 SGK)

Chứng minh:

a) $(a-b)^3 = -(b-a)^3 ;$

b) $(-a-b)^2 = (a+b)^2 .$

Giải

a) Ta có: $(a-b)^3 = [-(b-a)]^3 = -(b-a)^3 ;$

a) $(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = (a+b)^2 .$

Dạng 3. TÍNH NHANH

Phương pháp giải

Đưa số cần tính nhanh về dạng $(a+b)^2$ hoặc $(a-b)^2$. Trong đó a là số nguyên chia hết cho 10 hoặc 100 .

Ví dụ 10. (Bài 22 trang 22 SGK)

Tính nhanh: a) 101^2 ; b) 199^2 ; c) 47.53 ;

Giải

a) $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2.100.1 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$;

b) $199^2 = (200 - 1)^2 = 200^2 + 2.200.1 + 1^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$.

c) $47.35 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$.

Ví dụ 11 (Bài 35 trang 17 SK). Tính nhanh:

a) $34^2 + 66^2 + 68.66$; b) $74^2 + 24^2 - 48.74$;

Giải

a) $34^2 + 66^2 + 68.66 = 34^2 + 2.34.66 + 66^2 = (34 + 66)^2 = 100^2 = 10000$;

b) $74^2 + 24^2 - 48.74 = 74^2 - 2.74.24 + 24^2 = (74 - 24)^2 = 50^2 = 2500$.

Dạng 4. RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để khai triển và rút gọn.
- Thay giá trị của biến x vào biểu thức đã rút gọn.

Ví dụ 12. (Bài 24 trang 13 SGK)

Tính giá trị của biểu thức $49x^2 - 70x + 25$ với:

a) $x = 5$; b) $x = \frac{1}{7}$.

Giải

Ta có: $49x^2 - 70x + 25 = (7x)^2 - 2.7x.5 + 5^2 = (7x - 5)^2$.

a) Với $x = 5$ ta có: a) $(7x - 5)^2 = (7.5 - 5)^2 = 30^2 = 900$.

b) $x = \frac{1}{7}$ ta có: $(7x - 5)^2 = \left(7 \cdot \frac{1}{7} - 5\right)^2 = (-4)^2 = 16$

Ví dụ 13. (Bài 28, trang 14 SGK)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ với $x = 6$;

b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ với $x = 22$;

Giải

a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = x^3 + 3.x^2.4 + 3.x.4^2 + 4^3 = (x + 4)^3$.

Với $x = 6$ ta có: $(x+4)^3 = (6+4)^3 = 10^3 = 1000$.

b) Ta có: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3(x-2)^3$.

Với $x = 22$ ta có: $(x-2)^3 = (22-2)^3 = 20^3 = 8000$

Ví dụ 14. (Bài 30, trang 16 SGK)

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$;

b) $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

Giải

a) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3) = x^3 + 27 - 54 - x^3 = -27$.

b) $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
 $= (2x)^3 + y^3 - [(2x)^3 - y^3] = 8x^3 + y^3 - 8x^3 + y^3 = 2y^3$.

Ví dụ 15. (Bài 34, trang 17 SGK)

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2$;

b) $(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$;

c) $(x+y+z)^2 - 2(x+y+z)(x+y) + (x+y)^2$.

Giải

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

b) $(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - 2b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 - 2b^3$

c) $(x+y+z)^2 - 2(x+y+z)(x+y) + (x+y)^2 = [(x+y+z) - (x+y)]^2 = z^2$

Ví dụ 16. (Bài 36, trang 17 SGK)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $x^2 + 4x + 4$ với $x = 98$;

b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ với a) $x = 99$

Giải

a) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ với $x = 98$ thì:

$$(x+2)^2 = (98+2)^2 = 100^2 = 10000.$$

b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ với $x = 99$ thì:

$$(x+1)^3 = 100^3 = 1000000 .$$

Dạng 5. ĐIỀN VÀO Ô TRỐNG CÁC HẠNG TỬ THÍCH HỢP

Phương pháp giải

- Dựa vào một số hạng tử của đẳng thức có ô trống ta nhận dạng một trong bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Thay vào ô trống các hạng tử thích hợp

Ví dụ 17. (Bài 18, trang 11 SGK)

Hãy tìm cách giúp bạn A khôi phục lại những đẳng thức bị mực làm nhòe đi một số chỗ:

- a) $x^2 + 6xy + \dots = (\dots + 3y)^2$;
- b) $\dots - 10xy + 25y^2 = (\dots - \dots)^2$.
- c) Hãy nêu một đề bài tương tự.

Giải

- a) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$;
- b) $x^2 - 10xy + 25y^2 = (x - 5y)^2$;
- c) Đề bài tương tự: $x^2 - \dots + 4y^2 = (\dots - \dots)^2$

Đáp số: $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$.

Ví dụ 18. (Bài 29, trang 15 SGK)

Đố vui. Đức tính đáng quý

Hãy điền chữ số tương ứng với kết quả tìm được rồi xếp chữ thêm dấu cho thích hợp, em sẽ tìm ra một trong những đức tính quý báu của con người.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad \text{N}$$

$$16 + 8x + x^2 \quad \text{U}$$

$$3x^2 + 3x + 1 + x^3 \quad \text{H}$$

$$1 - 2y + y^2 \quad \text{Â}$$

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(y-1)^2$	$(x+4)^2$

Giải

Ta có: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$;

$$16 + 8x + x^2 = (x+4)^2 ;$$

$$3x^2 + 3x + 1 + x^3 = (x+1)^3 = (1+x)^3 ;$$

$$1 - 2y + y^2 = (y-1)^2$$

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(y-1)^2$	$(x+4)^2$
N	H	Â	N	H	Â	U

Đức tính quý báu của con người là: NHÂN HẬU

Ví dụ 19. (Bài 32, trang 17 SGK)

Điền vào ô trống các hạng tử thích hợp:

a) $(3x + y)(\square - \square + \square) = 27x^3 + y^3 ;$

b) $(2x - \square)(\square - 10x + \square) = 8x^3 - 125 .$

Giải

a) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2) = 27x^3 + y^3 ;$

b) $(2x - 5)(4x^2 - 10x + 25) = 8x^3 - 125 .$

Dạng 6. BIỂU DIỄN ĐA THỨC DƯỚI DẠNG BÌNH PHƯƠNG, LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG (MỘT HIỆU)

Phương pháp giải

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

Ví dụ 20: (Bài 16, trang 12 SGK)

Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu

a) $x^2 + 2x + 1;$

b) $9x^2 + y^2 + 6xy$

c) $25a^2 + 4b - 20ab$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

Giải

a) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2.x.1 + 1^2 = (x + 1)^2$

b) $9x^2 + y^2 + 6xy = (3x)^2 + 2.(3x).y + y^2 = (3x + y)^2$

c) $25a^2 + 4b - 20ab = (5a)^2 - 2.(5a).(2b) + (2b)^2 = (5a - 2b)^2$

Ví dụ 21: (Bài 21, trang 12 SGK)

Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $(2x+3y)^2 + 2(2x+3y) + 1$

b) $9x^2 + y^2 + 6xy$

c) Hãy nêu một đề bài tương tự.

Giải

a) $(2x+3y)^2 + 2 \cdot (2x+3y) \cdot 1 + 1^2 = (2x+3y+1)^2$

b) $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$

c) Chẳng hạn: $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a-3b)^2$

Ví dụ 22(Bài 27, trang 14 SGK)

Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

b) $8 - 2x + 6x^2 - x^3$

Giải

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (-x)^3 + 3 \cdot (-x) \cdot 1 + 3 \cdot (-x) \cdot 1^2 + 1^3 = (-x+1)^3$

b) $8 - 2x + 6x^2 - x^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 - x^3 = (2-x)^3$

Ví dụ 23:(Bài 37, trang 17 SGK)

Dùng bút chì nối các biểu thức sao cho chúng tạo thành các hằng đẳng thức.

Ví dụ 30: Biết số tự nhiên a chia 5 dư 1, số tự nhiên b chia 5 dư 2. Chứng minh rằng tổng các bình phương của hai số a và b chia hết cho 5.

Giải

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$(x+y)(x-y)$
$x^2-2xy+y^2$
$(x+y)^2$
$(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$y^3+3xy^2+3x^2y+x^3$
$(x-y)^3$

Ta có: $a = 5k + 1$; $b = 5l + 2$ ($k, l \in \mathbb{N}$). Khi đó:

$a^2 + b^2 = (5k+1)^2 + (5l+2)^2 = 25k^2 + 10k + 1 + 25l^2 + 20l + 4 = 5(5k^2 + 2k + 5l^2 + 4l + 1)$ chia hết cho 5.

Ví dụ 31: Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

Giải

Gọi ba số nguyên liên tiếp là $n-1, n, n+1$. Tổng lập phương của chúng là:

$$\begin{aligned}(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 - 1) + 9n.\end{aligned}$$

Ta có $n(n^2 - 1) = (n-1).n.(n+1)$ chia hết cho 3 vì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 3. Do đó $3n(n^2 - 1)$ chia hết cho 9, $9n$ cũng chia hết cho 9. Vậy

$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .

Dạng 13. MỘT SỐ HẰNG ĐẲNG THỨC TỔNG QUÁT

Phương pháp giải

Bằng phép nhân đa thức ta chứng minh được các hằng đẳng thức sau:

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \dots + a.b^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi số nguyên dương n .

2. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}.b + \dots - a.b^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi số nguyên dương lẻ n .

Chẳng hạn: $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

3. Nhị thức Niu-ton (Newton)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Với $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k} (k=1, 2, 3, \dots, n-1)$ (C_n^k gọi là tổ hợp chập k của n phần tử).

Chẳng hạn:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Áp dụng các hằng đẳng thức trên vào tính chất chia hết ta có:

- $a^n - b^n$ chia hết cho $a-b$ (với $a \neq b$ và n nguyên dương);
- $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho $a+b$.
- $a^{2n} - b^{2n}$ chia hết cho $a+b$.

Ví dụ 32: Chứng minh rằng: $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 11^{10} - 1 &= 11^{10} - 1^{10} = (11-1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \\ &= 10(11^9 + 11^8 + \dots + 1). \end{aligned}$$

Vì $11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1$ có chữ số tận cùng (hàng đơn vị) bằng 0 nên $11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1$ chia hết cho 10. Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Ví dụ 33: Với n là số nguyên dương chẵn, chứng minh rằng:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 \text{ chia hết cho } 323.$$

Giải

Ta có: $323 = 17 \cdot 19$. Áp dụng các hằng đẳng thức tổng quát ta có 20^{n-1} chia hết cho 19 và vì n chẵn nên $16^n - 3^n$ chia hết cho $(16+3) = 19$, do đó $20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$ chia hết cho 19.

Mặt khác, vì $20^n - 3^n$ chia hết cho 17 và $16^n - 1$ chia hết cho $(16+1) = 17$ nên

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1) \text{ chia hết cho } 17. \text{ Vậy } 20^n + 16^n - 3^n - 1 \text{ chia hết cho } 323.$$

Ví dụ 34: Chứng minh rằng không có đa thức $f(x)$ nào với hệ số nguyên mà $f(7) = 5$ và $f(15) = 9$.

Giải

Giả sử có đa thức với hệ số nguyên:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}) \text{ mà } f(7) = 5 \text{ và } f(15) = 9. \text{ Khi đó:}$$

$$a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 7 + a_0 = 5; \quad (1)$$

$$a_n 15^n + a_{n-1} 15^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 15 + a_0 = 9. \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$a_n (15^n - 7^n) + a_{n-1} (15^{n-1} - 7^{n-1}) + \dots + a_1 (15 - 7) = 4.$$

Vế trái gồm các hạng tử chia hết cho $15 - 7 = 8$ nên vế trái chia hết cho 8, còn vế phải bằng 4 không chia hết cho 8. Vậy không có đa thức $f(x)$ nào với hệ số nguyên mà $f(7) = 5$ và $f(15) = 9$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1) Tính:

a) $(x + 2y)^2$

b) $(3x - 2y)^2$

c) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} - y\right)\left(\frac{x}{2} + y\right)$

e) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

f) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

2. (Dạng 2) Chứng minh các đẳng thức:

a) $(x+y)^2 - y^2 = x(x+2y)$

b) $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (x+y)^2(x-y)^2$

c) $(x+y)^3 = x(x-3y)^2 + y(y-3x)^2$

3. (Dạng 2) Chứng minh rằng:

a) $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

b) $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(b^2 + 3a^2)$

4. (Dạng 1) Viết các đa thức sau thành tích:

a) $x^3 + 8y^3$

b) $a^6 - b^3$

c) $8y^3 - 125$

d) $8z^3 + 27$

5. (Dạng 3) Tính nhanh:

a) $1001^2 : 29,9.30,1$

b) $(31,8)^2 - 2.31,8.21,8 + (21,8)^2$

6. (Dạng 4) Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức:

a) $(x-10)^2 - x(x+80)$ với $x = 0,98$

b) $(2x+9)^2 - x(4x+31)$ với $x = -16,2$

c) $4x^2 - 28x + 49$ với $x = 4$

d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ với $x = 5$

7. (Dạng 5) Điền vào ô trống để các biểu thức sau trở thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^2 + 20x + \square$

b) $16x^2 + 24xy + \square$

c) $y^2 - \square + 49$

d) $\square - 42xy + 49y^2$

8. (Dạng 5) Điền vào ô trống để được đẳng thức đúng:

a) $(2a+3b)(\square - \square + \square) = 8a^3 + 27b^3$

b) $(5x - \square)(\square + 20xy + \square) = 125x^3 - 64y^3$

9. (Dạng 6) Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tổng hai bình phương:

a) $x^2 + 10x + 26 + y^2 + 2y$

b) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 1$

c) $z^2 - 6z + 13 + t^2 + 4t$

d) $4x^2 + 2z^2 - 4xz - 2z + 1$

10. (Dạng 8) Tìm x, biết:

a) $(x-3)^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - 2x = 24$

c) $(2x-1)^2 + (x+3)^2 - 5(x+7)(x-7) = 0$

11. (Dạng 4) Rút gọn biểu thức:

a) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$

b) $(x+1)^3 + (x-1)^3 + x^3 - 3x(x+1)(x-1)$

c) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (2a-b)^2$

d) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

e) $3(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{64} + 1) + 1$

f) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 2(a+b)^2$

12. (Dạng 9) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $x^2 - 20x + 101$

b) $4a^2 + 4a + 2$

c) $x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 28$

13. (Dạng 9) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $A = 4x - x^2 + 3$

b) $B = x - x^2$

14. (Dạng 10) Chứng minh rằng nếu:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2 \text{ thì } x = y = z.$$

15. (Dạng 7) Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x, y :

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) + (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 2x^3$$

16. (Dạng 11) Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau thỏa với mọi x, y :

a) $x^2 + xy + y^2 + 1 > 0$

b) $x^2 + 5y^2 + 2x - 4xy - 10y + 14 > 0$

c) $5x^2 + 10y^2 - 6xy - 4x - 2y + 3 > 0$

17. (Dạng 12) Cho số tự nhiên n chia cho 7 dư 4. Hỏi n^2 chia cho 7 dư bao nhiêu? n^3 chia cho 7 dư bao nhiêu?

18. (Dạng 12) Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng $a^3 + b^3$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $a + b$ chia hết cho 3.

19. (Dạng 12) Cho $a + b = 1$. Tính giá trị $M = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$

20. (Dạng 13) Với n là số tự nhiên, chứng minh rằng:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133.

b) $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$ chia hết cho 59

c) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19.

21. (Dạng 13) Với n là số tự nhiên, ch $a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$, $b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

22. (Dạng 13) Cho số nguyên $n > 1$. Chứng minh rằng $n^n - n^2 + n - 1$ chia hết cho $(n-1)^2$.
23. (Dạng 13) Cho đa thức với hệ số nguyên $f(n)$ có $f(0)$ và $f(1)$ là hai số lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

§6. §7. §8. §9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khi các hạng tử của một đa thức có chung một nhân tử, ta có thể đặt nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc theo công thức:

$$A.B + A.C = A(B + C).$$

Nhân tử chung của một đa thức gồm:

- a) Hệ số là ước chung lớn nhất của các hệ số trong mọi hạng tử.
- b) Các lũy thừa bằng chữ số có mặt trong mọi hạng tử với số mũ nhỏ nhất của nó.

Ví dụ: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$-13x^4y^3 + 26x^2y^2z^2 - 39xy^2z^3.$$

$$+ \text{ƯCLN}(13, 26, 39) = 13$$

+ Số mũ nhỏ nhất của x trong các hạng tử là 1;

+ Số mũ nhỏ nhất của y trong các hạng tử là 2;

$$\text{Vậy: } -13x^4y^3 + 26x^2y^2z^2 - 39xy^2z^3 = -13xy^2(x^3y - 2xz^2 + 3z^3).$$

2. Nếu một đa thức chứa một trong các vế của bảy hằng đẳng thức đáng nhớ thì ta có thể dùng hằng đẳng thức đó để viết đa thức các thành nhân tử.

Ví dụ:

$$25x^2 - y^2 = (5x)^2 - y^2 = (5x - y)(5x + y).$$

3. Nhóm nhiều hạng tử của đa thức một cách thích hợp để làm xuất hiện các nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức, chẳng hạn:

$$AB + AC - DB - DC = A(B + C) - D(B + C) = (B + C)(A - D).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ.

Phương pháp giải

Áp dụng một trong các phương pháp:

- Đặt nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc:

$$AB + AC - AD = A(B + C - D)$$

- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Phương pháp nhóm nhiều hạng tử

Ví dụ 1. (Bài 39, trang 19 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $3x - 6y$ b) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y$ c) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2$
- d) $\frac{2}{5}x(y-1) - \frac{2}{5}y(y-1)$ e) $10x(x-y) - 8y(y-x)$

Giải

- a) $3x - 6y = 3(x - 2y)$;
- b) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y = x^2\left(\frac{2}{5} + 5x + y\right)$;
- c) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 7xy(2x - 3y + 4xy)$;
- d) $\frac{2}{5}x(y-1) - \frac{2}{5}y(y-1) = \frac{2}{5}(y-1)(x-y)$;
- e) $10x(x-y) - 8y(y-x) = 10x(x-y) + 8y(x-y) = 2(x-y)(5x - 4y)$.

Ví dụ 2. (Bài 43, trang 20 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^2 + 6x + 9$; b) $10x - 25 - x^2$;
- c) $8x^3 - \frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{25}x^2 - 64y^2$

Giải

- a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$;
- b) $10x - 25 - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x - 5)^2$;
- c) $8x^3 - \frac{1}{8} = (2x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$;
- d) $\frac{1}{25}x^2 - 64y^2 = \left(\frac{1}{5}x\right)^2 - (8y)^2 = \left(\frac{1}{5}x - 8y\right)\left(\frac{1}{5}x + 8y\right)$.

Ví dụ 3. (Bài 44, trang 20 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $x^3 + \frac{1}{27}$; b) $(a+b)^3 - (a-b)^3$; c) $(a+b)^3 + (a-b)^3$; ***Giải***
- d) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$; e) $-x^2 + 9x^2 - 27x + 27$.

Áp dụng các hằng đẳng thức:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2);$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$a) x^3 + \frac{1}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right);$$

$$b) (a+b)^3 - (a-b)^3 = (a+b-a+b) \left[(a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2 \right] \\ = 2b(2a^2 + 2b^2 + a^2 - b^2) = 2b(3a^2 + b^2);$$

$$c) (a+b)^3 + (a-b)^3 = (a+b+a-b) \left[(a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2 \right] \\ = 2a(2a^2 + 2b^2 - a^2 + b^2) = 2a(a^2 + 3b^2);$$

d) Áp dụng $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$ ta có:

$$d) 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2y + 3.2x.y^2 + y^3 \\ = (2x+y)^3.$$

$$e) -x^2 + 9x^2 - 27x + 27 = (-x+3)^3.$$

Ví dụ 4. (Bài 27, trang 22 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) x^2 - xy + x - y;$$

$$b) xz + yz - 5(x+y);$$

$$c) 3x^2 - 3xy - 5x + 5y.$$

Giải

$$a) x^2 - xy + x - y = x(x-y) + (x-y) = (x-y)(x+1);$$

$$b) xz + yz - 5(x+y) = z(x+y) - 5(x+y) = (x+y)(z-5);$$

$$c) 3x^2 - 3xy - 5x + 5y = 3x(x-y) - 5(x-y) = (x-y)(3x-5).$$

Ví dụ 5. (Bài 48, trang 22 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) x^2 + 4x - y^2 + 4;$$

$$b) 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2;$$

$$c) x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2.$$

Giải

$$a) x^2 + 4x - y^2 + 4 = (x^2 + 4x + 4) - y^2 = (x+2)^2 - y^2 \\ = (x+2+y)(x+2-y);$$

$$b) 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2 = 3[(x^2 + 2xy + y^2) - z^2] = 3[(x+y)^2 - z^2] \\ = 3(x+y+z)(x+y-z);$$

$$c) x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x-y)^2 - (z-t)^2 \\ = (x-y-z+t)(x-y+z-t).$$

Ví dụ 6. (Bài 51, trang 24 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)x^3 - 2x^2 + x; \quad b)2x^2 + 4x + 2 - 2y^2; \quad c)2xy - x^2 - y^2 + 16. \text{ *Giải*}$$

$$a)x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2;$$

$$b)2x^2 + 4x + 2 - 2y^2 = 2[(x^2 + 2x + 1) - y^2] = 2[(x + 1)^2 - y^2] \\ = 2(x + 1 - y)(x + 1 + y);$$

$$c)2xy - x^2 - y^2 + 16 = 16 - (x^2 - 2xy + y^2) = 4^2 - (x - y)^2 \\ = (4 + x - y)(4 - x + y).$$

Ví dụ 7. (Bài 53, trang 24 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)x^2 - 3x + 2; \quad b)x^2 + x - 6; \quad c)x^2 + 5x + 6.$$

Giải

$$a)x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2);$$

$$b)x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(x - 2);$$

$$c)x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

Ví dụ 8. (Bài 54, trang 25 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x; \quad b)2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 \\ c)x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2).$$

Giải

$$a)x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x = x(x^2 + 2xy + y^2 - 9) = x[(x + y)^2 - 3^2] \\ = x(x + y + 3)(x + y - 3)$$

$$b)2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 = 2(x - y) - (x - y)^2 = (x - y)(2 - x + y)$$

$$c)x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2).$$

Ví dụ 9. (Bài 57, trang 25 SGK)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)x^2 - 4x + 3; \quad b)x^2 + 5x + 4; \\ c)x^2 - x - 6; \quad d)x^4 + 4.$$

Giải

$$a)x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3);$$

$$b)x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4 = x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4);$$

$$c) x^2 - x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6 = x(x-3) + 2(x-3) = (x-3)(x+2);$$

$$d) x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

Dạng 2. TÍNH NHANH

Phương pháp giải

Phân tích biểu thức cần tính nhanh ra thừa số rồi tính

Ví dụ 10. (Bài 46, trang 21 SGK)

Tính nhanh:

$$a) 73^2 - 27^2;$$

$$b) 37^2 - 13^2;$$

$$c) 2002^2 - 2^2.$$

Giải

$$a) 73^2 - 27^2 = (73 - 27)(73 + 27) = 46.100 = 4600;$$

$$b) 37^2 - 13^2 = (37 - 13)(37 + 13) = 24.50 = 1200;$$

$$c) 2002^2 - 2^2 = (2002 - 2)(2002 + 2) = 2000.2004 = 4008000.$$

Ví dụ 11. (Bài 49, trang 22 SGK)

Tính nhanh:

$$a) 37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5$$

$$b) 45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45.$$

Giải

$$a) 37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5$$

$$= (37,5.6,5 + 3,5.37,5) - (7,5.3,4 + 6,6.7,5)$$

$$= 37,5(6,5 + 3,5) - 7,5(3,4 + 6,6)$$

$$= 37,5.10 - 7,5.10 = 375 - 75 = 300$$

$$b) 45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45 = 45^2 + 2.40.45 + 40^2 - 15^2$$

$$= (45 + 40)^2 - 15^2$$

$$= 85^2 - 15^2 = (85 - 15)(85 + 15) = 70.100 = 7000.$$

Ví dụ 12. (Bài 56, trang 25 SGK)

Tính nhanh:

$$a) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \text{ với } x = 49,75;$$

$$b) x^2 - y^2 - 2y - 1 \text{ với } x = 93, y = 6.$$

Giải

$$a) x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = x^2 + 2.x.\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x + 0,25\right)^2$$

Với $x = 49,75$ thì $(x + 0,25)^2 = (49,75 + 0,25)^2 = 50^2 = 2500$.

$$\begin{aligned} b) x^2 - y^2 - 2y - 1 &= x^2 - (y^2 + 2y + 1) = x^2 - (y + 1)^2 \\ &= (x - y - 1)(x + y + 1). \end{aligned}$$

Với $x = 93, y = 6$ ta có

$$(x - y - 1)(x + y + 1) = (93 - 6 - 1)(93 + 6 + 1) = 86.100 = 8600.$$

Dạng 3. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Trước hết phân tích biểu thức thành nhân tử;
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã phân tích.

Ví dụ 13. (Bài 40, trang 19 SGK)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $15.91,5 + 150.0,85$

b) $5x^5(x - 2z) + 5x^5(2z - x)$ với $x = 1999, y = 2000, z = -1$.

Giải

a) $15.91,5 + 150.0,85 = 15.91,5 + 15.8,5 = 15(91,5 + 8,5) = 15.100 = 150$

b) $5x^5(x - 2z) + 5x^5(2z - x) = 5x^5(x - 2z + 2z - x) = 5x^5.0 = 0$

Với $x = 1999, y = 2000, z = -1$ thì biểu thức bằng 0.

Dạng 4. TÌM x THỎA MÃN ĐẲNG THỨC CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Chuyển tất cả các số hạng về vế trái của đẳng thức, vế phải bằng 0.
- Phân tích vế trái thành nhân tử để được $A.B = 0$
 $A.B = 0$ suy ra $A = 0$ hoặc $B = 0$
- Lần lượt tìm x từ các đẳng thức $A = 0, B = 0$ ta được kết quả

Ví dụ 14. (Bài 41. Trang 19 SGK)

Tìm x , biết:

a) $5x(x - 2000) - x + 2000 = 0$;

b) $x^3 - 13x = 0$.

Giải

a) Ta có $5x(x - 2000) - x + 2000 = 5x(x - 2000) - (x - 2000)$
 $= (x - 2000)(5x - 1).$

Đẳng thức đã cho trở thành: $(x-2000)(5x-1)=0$. Suy ra $x=2000$ hoặc $x=\frac{1}{5}$

b) $x^3-13x=x(x^2-13)$. Đẳng thức trở thành: $x(x^2-13)=0$ suy ra $x=0$ hoặc $x^2=13$. Vậy $x=0$; $x=\pm\sqrt{13}$

Ví dụ 15. (Bài 45, trang 20 SGK)

Tìm x , biết:

a) $2-25x^2=0$;

b) $x^2-x+\frac{1}{4}$.

Giải

a) Ta có $2-25x^2=(\sqrt{2}-5x)(\sqrt{2}+5x)$. Từ đẳng thức đã cho suy ra

1. $x=\frac{5}{\sqrt{2}}; x=-\frac{5}{\sqrt{2}}$.

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$. Suy ra $x=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 16. (Bài 50, trang 23 SGK)

Tìm x , biết:

a) $x(x-2)+x-2=0$;

b) $5x(x-3)-x+3=0$

Giải

a) Ta có $x(x-2)+x-2=(x-2)(x+1)$. Do đó $(x-2)(x+1)=0$ suy ra $x=2$ hoặc $x=-1$.

b) $5x(x-3)-x+3=5x(x-3)-(x-3)=(x-3)(5x-1)$. Từ đẳng thức: $(x-3)(5x-1)=0$. Suy ra $x=3$ hoặc $x=1/5$.

Ví dụ 17. (Bài 55, trang 25 SGK)

Tìm x , biết:

a) $x^3-\frac{1}{4}x=0$;

b) $(2x-1)^2-(x+3)^2=0$;

c) $x^2(x-3)+12-4x=0$.

Giải

a) Ta có $x^3-\frac{1}{4}x=x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Do đó:

$x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$. Suy ra $x=0$; $x=\frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{2}$.

b) $(2x-1)^2-(x+3)^2=(2x-1-x-3)(2x-1+x+3)=(x-4)(3x+2)$.

Do đó $(x-4)(3x+2)=0$ suy ra $x=4$ hoặc $x=-2/3$

c) $x^2(x-3)+12-4x=x^2(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x^2-4)$.

Do đó $(x-3)(x^2-4)=0$. Suy ra $x=3$ hoặc $x=\pm 2$.

Dạng 5. ỨNG DỤNG VÀO SỐ HỌC.

Phương pháp giải

- Số nguyên a chia hết cho số nguyên b nếu có số nguyên k sao cho $a=b.k$
- Phân tích biểu thức ra thừa số để xuất hiện số chia

Ví dụ 18. (Bài 42, trang 19 SGK)

Chứng minh rằng $55^{n+1}-55^n$ chia hết cho 54 (với n là số tự nhiên).

Giải

Ta có $55^{n+1}-55^n=55^n(55-1)=54.55^n$ chia hết cho 54.

Ví dụ 19. (Bài 52, trang 24 SGK)

Chứng minh rằng $(5n+2)^2-4$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Giải

Ta có $(5n+2)^2-4=(5n+2+2)(5n+2-2)=5n(5n+4)$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 20. (Bài 58, trang 27 SGK)

Chứng minh rằng n^3-n chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Giải

Ta có $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$. Vì $n-1, n, n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 2 và ít nhất một số chia hết cho 3 nên tích $(n-1).n.(n+1)$ chia hết cho $2.3=6$ (vì 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

Ví dụ 21. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có:

- a) n^3-13n chia hết cho 6;
- b) n^5-5n^3+4n chia hết cho 120;
- c) n^3-3n^2-n+3 chia hết cho 48 với n lẻ.

Giải

a) Ta có $n^3-13n=(n^3-n)-12n$ theo ví dụ 20 ta được n^3-n chia hết cho 6 và $12n$ chia hết cho 6 nên n^3-13n chia hết cho 6 với mọi số nguyên n

b) Ta có:

$$\begin{aligned}n^5-5n^3+4n &= n^5-n^3-4n^3+4n = n^3(n^2-1)-4n(n^2-1) \\ &= n(n^2-1)(n^2-4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\end{aligned}$$

là tích của 5 số nguyên liên tiếp.

Trong 5 số nguyên liên tiếp có ít nhất hai số là bội của 2 (trong đó có một số là bội của 4, một số bội của 3 và một số bội của 5). Do đó tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $8.3.5 = 120$ (vì 8, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau).

c) Ta có $n^3 - 3n^2 - n + 3 = n^2(n-3) - (n-3) = (n-3)(n^2-1) = (n-3)(n-1)(n+1)$

Thay $n = 2k + 1$ vào thì được:

$$(2k-2).2k.(2k+2) = 8(k-1).k.(k+1)$$

Chia hết cho 48. Vì $(k-1)k(k+1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho $2.3 = 6$.

Dạng 6. TÌM CÁC CẶP SỐ NGUYÊN (x, y) THỎA MÃN ĐẲNG THỨC CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

- Phân tích một vế của đẳng thức thành tích của hai thừa số, vế còn lại là một số nguyên n.
- Phân tích số nguyên n thành tích hai thừa số bằng tất cả các cách, từ đó tìm ra các số nguyên x, y.

Ví dụ 22. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn một trong các đẳng thức sau:

a) $x + y = xy$;

b) $xy - x + 2(y-1) = 13$.

Giải

a) Ta có $x + y = xy$ được viết thành: $xy - x - y = 0$. Do đó suy ra:

$$x(y-1) - (y-1) = 1 \text{ hay } (y-1)(x-1) = 1$$

Mà $1 = 1.1 = (-1).(-1)$ nên:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ x-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y-1=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$$

Do đó: $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy ta có hai cặp số nguyên cần tìm là (0,0) và (2,2).

b) Phân tích về trái ra thừa số ta có:

$$xy - x + 2(y-1) = x(y-1) + 2(y-1) = (y-1)(x+2).$$

Vế phải bằng $13 = 1.13 = 13.1 = (-1)(-13) = (-13)(-1)$ nên ta lần lượt có:

$$\begin{cases} y-1=1 \\ x+2=13 \end{cases}; \begin{cases} y-1=13 \\ x+2=1 \end{cases}; \begin{cases} y-1=-1 \\ x+2=-13 \end{cases}; \begin{cases} y-1=-13 \\ x+2=-1 \end{cases}$$

Hay :

$$\begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=14 \end{cases}; \begin{cases} x=-15 \\ y=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-3 \\ y=-12 \end{cases}$$

Vậy ta có 4 cặp số nguyên cần tìm là:

$$(11, 2); (-1, 14); (-15, 0); (-3, -12)$$

Dạng 7. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp giải

Khi gặp đa thức nhiều ẩn hoặc một ẩn nhưng phức tạp ta dùng cách đặt ẩn phụ rồi phối hợp các phương pháp đặt nhân tử chung, hằng đẳng thức, tách và thêm bớt số hạng để phân tích ra thừa số.

Ví dụ 23. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) + 2;$

b) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1;$

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2.$

Giải

a) Đặt $y = x^2 + x$ ta có:

$$(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) + 2 = y^2 + 3y + 2 = (y^2 + y) + (2y + 2) = y(y + 1) + 2(y + 1) = (y + 1)(y + 2)$$

Thay $y = x^2 + x$ vào ta được:

$$(y + 1)(y + 2) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3)+1 &= [x(x+3)][(x+1)(x+2)]+1 \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 3x = y$, ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 &= y(y + 2) + 1 \\ &= y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 \\ &= (x^2 + 3x + 1)^2 \end{aligned}$$

c) Đặt $y = x^2 + x + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2 &= y(y + 2x) + x^2 \\ &= y^2 + 2yx + x^2 = (y + x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4 \end{aligned}$$

Dạng 8. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Phương pháp giải

- Giả sử đa thức đã cho được phân tích thành tích của hai đa thức khác. Ta cần xác định hệ số của hai đa thức nhân tử.
- Thực hiện phép nhân hai đa thức rồi cho đồng nhất các hệ số tương ứng.

Ví dụ 24. Phân tích thành nhân tử.

$$a) x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1;$$

$$b) 3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1.$$

Giải

a) Giả sử đa thức được phân tích thành hai đa thức bậc hai dạng:

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

Thực hiện phép nhân đa thức ta được:

$$(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) = x^4 + (a + b)x^3 + (2 + ab)x^2 + (a + b)x + 1$$

Đồng nhất với đa thức đã cho ta được: $a + b = 6, ab = 9$. Ta tìm được $a = b = 3$.

$$\text{Vậy } x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

Cách khác:

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

$$= x^4 + 2x^2(3x + 1) + (9x^2 + 6x + 1)$$

$$= x^4 + 2x^2(3x + 1) + (3x + 1)^2$$

$$= (x^2 + 3x + 1)^2$$

b) Ta tìm a, b, c, d sao cho:

$$3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1$$

$$= (3x + ay + b)(x + cy + d)$$

$$= 3x^2 + (3c + a)xy + (3d + b)x + (ad + bc)y + acy^2 + bd$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng của hai vế ta được:

$$3c + a = -22; 3d + b = -4; ad + bc = 8; ac = 7; bd = 1$$

Từ $bd = 1$, chọn $b = d = 1$ (vì $3d + b = -4$).

Ta có $a + c = -8$, kết hợp với $3c + a = -22$, ta được $a = -1, c = -7$.

$$\text{Vậy: } 3x^2 + 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1 = (3x - y - 1)(x + 7y - 1).$$

Dạng 9: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

- Bằng cách phân tích đa thức thành nhân tử của vế trái để đưa đẳng thức về dạng tích bằng 0.
- Xét từng thừa số bằng 0 rồi chứng minh đẳng thức, nhiều trường hợp phải dùng

đến đặt ẩn phụ.

Ví dụ 25: Chứng minh rằng nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ thì $a=b=c$ hoặc $a + b + c = 0$.

Giải

Từ đẳng thức đã cho suy ra $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$. Ta phân tích đa thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ thành nhân tử. Ta có:

$$b^3 + c^3 = (b+c)(b^2 + c^2 - bc) = (b+c)[(b+c)^2 - 3bc]$$

$$= (b+c)^3 - 3bc(b+c);$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c) - 3abc$$

$$= (a+b+c)[a^2 - a(b+c) + (b+c)^2] - 3bc(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Do đó, nếu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ thì $a + b + c = 0$, hoặc:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \text{ hay } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0.$$

Suy ra $a=b=c$.

Ví dụ 26. Chứng minh rằng:

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Giải

Đặt $x = b-c, y = c-a, z = a-b$. Áp dụng Ví dụ 25:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(\text{vì } x+y+z=0)$$

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, tức là có điều phải chứng minh.

Ví dụ 27. Phân tích đa thức $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ thành nhân tử.

Áp dụng chứng minh đẳng thức:

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 = 24abc$$

Hướng dẫn

Sử dụng các hằng đẳng thức $A^3 - B^3$ và $A^3 + B^3$ nhân hai số hạng đầu và hai số hạng cuối ta được: $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Áp dụng:

$$\text{Đặt } x = a+b-c; y = b+c-a; z = c+a-b \text{ thì } a+b+c = x+y+z$$

Dạng 10. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải

Để chứng minh $A > B$ ta lập hiệu $A-B$ và phân tích đa thức $A-B$ thành nhân tử. Sau đó chứng minh $A-B > 0$.

Ví dụ 28: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$a)a^3(a^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) < 0 \text{ với } a < b < c$$

$$b)a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải:

a) Ta phân tích vế trái của bất đẳng thức thành nhân tử:

$$\begin{aligned} & a^3(a^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) \\ &= a^3[(b^2 - a^2) + (a^2 - c^2)] + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ &= a^3(b^2 - a^2) + a^3(a^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) \\ &= (b^2 - a^2)(c^3 - a^3) + (a^2 - c^2)(a^3 - b^3) \\ &= (a-b)(c-a)[(a+b)(a^2 + ac + c^2)] + (a-c)(a-b)[(a+c)(a^2 + ab + b^2)] \\ &= (a-b)(c-a)[(a+b)(a^2 + ac + c^2) - (a+c)(a^2 + ab + b^2)] \\ &= (a-b)(c-a)(c-b)(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Vì $0 < a < b < c$ nên $a - b < 0$, $c - a > 0$, $c - b > 0$, $b + bc + ca > 0$

Do đó: $(a-b)(c-a)(c-b)(ab + bc + ca) < 0$

Vậy: $a^3(a^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2) < 0$ với $a < b < c$

b) Xét hiệu:

$$\begin{aligned} & a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3 \\ &= [a(b-c)^2 - a^3] + [b(c-a)^2 - b^3] + [c(a+b)^2 - c^3] \\ &= a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2] \\ &= a(a+b-c)(b-c-a) + b(c+a-b)(c-b-a) + c(a+b-c)(a+b+c) \\ &= (a+b-c)(ab - ac - a^2 - bc - b^2 + ac + ab + bc + c^2) \\ &= (a+b-c)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= (a+b-c)[c^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên: $a + b - c > 0$; $c + a - b > 0$, $a + c - b > 0$ do đó $(a+b-c)(c+a-b)(a+c-a) > 0$

Vậy: $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$.

C. LUYỆN TẬP:

1. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) 7x + 7y$$

$$b) 2x^2y - 6xy^2$$

$$c) 3x(x-1) + 7x^2(x-1)$$

$$d) 3x(x-a) + 5a(a-x)$$

2. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) 6x^4 - 9x^3$$

$$b) 5y^{10} + 15y^6$$

$$c) 9x^2y^2 + 15x^2y - 21xy^2$$

$$d) x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2yz^2$$

3. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$b) x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$$

$$c) x^3 - 64$$

$$d) 125x^3 + y^6$$

$$e) 0.125(a+1)^3 - 1$$

4. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) 2x(x+1) + 2(x+1)$$

$$b) y^2(x^2 + y) - zx^2 - zy$$

$$c) 4x(x-2y) + 8y(2y-x)$$

$$d) 49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$$

5. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) (2x+1)^2 - (x-1)^2$$

$$b) 9(x+5)^2 - (x-7)^2$$

$$c) 25(x-y)^2 - 16(x+y)^2$$

$$d) 49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$$

6. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^4 + x^3 + x + 1$$

$$b) x^4 - x^3 - x + 1$$

$$c) x^2y + xy^2 - x - y$$

$$d) ax^2 + a^2y - 7x - 7y$$

$$e) ax^2 + ay - bx^2 - by$$

$$f) x(x+1)^2 + x(x-5) - 5(x+1)^2$$

7. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) 3x^2 - 12y^2$$

$$b) x^2 - y^2 - x + y$$

$$c) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 27z^3$$

8. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^2 - 2xy + y^2 - xz + yz$$

$$c) a^3x - ab + b - x$$

$$b) x^2 - y^2 - x + y$$

$$d) 3x^2(a+b+c) + 36xy(a+b+c) + 108y^2(a+b+c)$$

9. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^2 - x - 6$$

$$b) x^4 + 4x^2 - 5$$

$$c) x^3 - 19x - 30$$

$$d) x^4 + x^2 + 1$$

10. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$$

$$b) (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

$$c) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)$$

11. (Dạng 1). Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) (1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)$$

$$b) (x^2-8)^2 + 36$$

$$c) 81x^4 + 4$$

12. (Dạng 2). Tính giá trị biểu thức

$$a) \frac{43^2 - 11^2}{(36,5)^2 - (27,5)^2}$$

$$b) \frac{97^3 + 83^3}{180} - 97,83$$

$$c) A = x(2x - y) - z(y - 2x) \text{ với } x = 1, 2; y = 1, 4; z = 1, 8$$

$$d) B = (x - 1)x^2 - 4x(x - 1) + 4(x - 1) \text{ với } x = 3$$

13. (Dạng 4). Tìm x, biết:

$$a) (2x - 1)^2 - 25 = 0$$

$$b) 8x^3 - 50x = 0$$

$$c) (x - 2)(x^2 + 2x + 7) + 2(x^2 - 4) - 5(x - 2) = 0$$

14. (Dạng 4). Tìm x, biết:

$$a) 3x(x - 1) + x - 1 = 0$$

$$b) 2x(x + 3) - x^2 - 3x = 0$$

$$c) 4x^2 - 25 - (2x - 5)(2x + 7)$$

$$d) x^3 + 27 + (x + 3)(x - 9) = 0$$

15. (Dạng 5). Chứng minh rằng:

$$a) 2^9 - 1 \text{ chia hết cho } 73$$

$$b) 5^6 - 10^4 \text{ chia hết cho } 9$$

16. (Dạng 5). Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì:

$$a) (n + 3)^2 - (n - 1)^2 \text{ chia hết cho } 8$$

$$b) (n + 6)^2 - (n - 6)^2 \text{ chia hết cho } 24$$

17. (Dạng 5). Chứng minh rằng với n lẻ thì:

$$a) n^2 + 4x + 3 \text{ chia hết cho } 8 \quad b) n^3 + 3n^2 - n - 3 \text{ chia hết cho } 48$$

18. (Dạng 6). Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa một trong các đẳng thức sau:

$$a) y(x - 2) + 3x - 6 = 2$$

$$b) xy + 3x - 2y - 7 = 0$$

$$c) xy - x + 5y - 7 = 0$$

19. (Dạng 7). Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$$

$$b) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 12) - 12$$

$$c) (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$$

$$d) (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$$

20. (Dạng 8). Phân tích đa thức thành nhân tử

$$a) 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3;$$

$$b) 3x^3 - 14x^2 + 4x + 3;$$

$$c) 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3.$$

21. (Dạng 9). cho $a + b + c = 0$, chứng minh các đẳng thức sau:

$$a)a^3 + b^3 + c^3 = 3abc;$$

$$b)2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$c)(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

22.(Dạng 9).cho 3 số a ,b ,c thỏa a +b +c=1 và $a^3 + b^3 + c^3 =1$ chứng minh

$$a^{2005} + b^{2005} + c^{2005} =1.$$

23.(Dạng 10).a ,b ,c là 3 cạnh của tam giác .Chứng minh rằng :

$$a)a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b);$$

$$b)(a+b+c)^2 \leq 9abc \text{ với } a \leq b \leq c;$$

$$c)2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0;$$

$$d)4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

§ 10.CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

§ 11.CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Quy tắc chia đơn thức A cho đơn thức B:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia từng lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả tìm được với nhau.

Ví dụ: $20x^4y^3z : 4x^2y = 5x^2y^2z.$

2.Quy tắc chia đa thức A cho đơn thức B:

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B ,ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

Ví dụ: $(16x^4y^2 - 20x^2y^4 + 8x^2y^2) : 4xy^2 =$
 $= 16x^4y^2 : 4xy^2 - 20x^2y^4 : 4xy^2 + 8x^2y^2 : 4xy^2 = 4x^3 - 5xy^2 + 2x$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: LÀM TÍNH CHIA

Phương pháp giải

- Chia hai lũy thừa của một biến:

$$x^m : x^n = x^{m-n} (m \geq n \geq 0).$$

- Quy tắc chia hai đơn thức A và B.

- Quy tắc chia đa thức cho đơn thức:

$$(A + B - C) : D = A : D + B : D - C : D.$$

Ví dụ 1: (Bài 59 .trang 26 SGK)

Làm tính chia:

$$a) 5^3 : (-5)^2; \quad b) \left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3; \quad c) (-12)^3 : 8^3.$$

Giải

$$a) 5^3 : (-5)^2 = 5^3 : 5^2 = 5; \quad b) \left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16};$$

$$c) (-12)^3 : 8^3 = \left(-\frac{12}{8}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}.$$

Ví dụ 1: (Bài 60 .trang 27 SGK)

Làm tính chia:

$$a) x^{10} : (-x)^8; \quad b) (-x)^5 : (-x)^3; \quad c) (-y)^5 : (-y)^4.$$

Giải

$$a) x^{10} : (-x)^8 = x^{10} : x^8 = x^2; \quad b) (-x)^5 : (-x)^3 = (-x)^2 = x^2;$$

$$c) (-y)^5 : (-y)^4 = -y.$$

Ví dụ 3: (Bài 61 .trang 27 SGK)

Làm tính chia:

$$a) 5x^2y^4 : 10x^2y; \quad b) \frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right);$$

$$c) (-xy)^{10} : (-xy)^5.$$

Giải

$$a) 5x^2y^4 : 10x^2y = \frac{5}{10}y^3 = \frac{1}{2}y^3;$$

$$b) \frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}xy = -\frac{3}{2}xy;$$

$$c) (-xy)^{10} : (-xy)^5 = (-xy)^5.$$

Ví dụ 4: (Bài 64 .trang 28 SGK)

Làm tính chia:

$$a) (-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2;$$

$$b) x^3 - 2x^2y + 3xy^2 : \left(-\frac{1}{2}x\right);$$

$$c)(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : (3xy).$$

Giải

$$a)(-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2 = -x^3 + \frac{3}{2} - 2x;$$

$$b)x^3 - 2x^2y + 3xy^2 : \left(-\frac{1}{2}x\right) = -2x^2 + 4xy - 6y^2;$$

$$c)(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : (3xy) = xy + 2xy^2 - 4.$$

Ví dụ 5: (Bài 65 .trang 29 SGK)

$$\text{Làm tính chia: } [3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (y-x)^2.$$

Giải

Ta có $(y-x)^2 = (x-y)^2$ nên :

$$[3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2] : (y-x)^2 = 3(x-y)^2 + 2(x-y) - 5.$$

Dạng 2: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Phương pháp giải

- Trước hết rút gọn biểu thức bằng cách chia đơn thức cho đơn thức hoặc đa thức cho đơn thức.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn.

Ví dụ 6: (Bài 61 .trang 27 SGK)

Tính giá trị biểu thức sau:

$$15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2 \text{ với } x = 2, y = -10, z = 2004.$$

Giải

Ta có : $15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2 = 3x^3y$. Với $x = 2, y = -10$ thì :

$$3x^3y = 3.2^3(-10) = -240.$$

Dạng 3: KHÔNG LÀM TÍNH CHIA , XÉT XEM ĐA THỨC A CÓ CHIA HẾT CHO ĐƠN THỨC B KHÔNG

Phương pháp giải

A muốn chia hết cho B thì mọi hạng tử của A đều phải chia hết cho B.

Ví dụ 7: (Bài 66. trang 29 SGK)

Khi giải bài tập : "Xét xem đa thức $A = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2y$ có chia hết cho đơn thức $B = 2x^2$ hay không ?"

Hà trả lời : "A không chia hết cho B vì 5 không chia hết cho 2".

Quang trả lời: "A chia hết cho B vì mọi hạng tử của A đều chia hết cho B".

Ý kiến của em?

Giải

Ý kiến của em: quang trả lời đúng.

Ví dụ 8: (Bài 63 .trang 28 SGK)

Không làm tính chia, hãy xét xem đa thức a có chia hết cho đơn thức B không ?

$$A = 15xy^2 + 17xy^3 + 18y^2; B = 6y^2.$$

Giải

A chia hết cho B vì $15xy^2, 17xy^3, 18y^2$ đều chia hết cho $6y^2$

C. LUYỆN TẬP

1.(Dạng 1). Làm tính chia

$$a) 25^8 : 5^{12}; \quad \left(\frac{49}{25}\right)^{12} : \left(\frac{7}{5}\right)^{24}; \quad \left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{49}.$$

$$b) \left(-\frac{12}{25}x^4y^3z^5\right) : \frac{4}{5}x^4yz^2; \quad -21xy^5z^3 : 7xy^2z^3.$$

2.(Dạng 1). Làm tính chia

$$a) 13(a-b)^8 : 5(a-b)^3; \quad b) -\frac{3}{2}(x-y)^6 : \frac{3}{4}(x-y)^3.$$

$$c) (x^3+8) : (x+2).$$

3.(Dạng 1). Làm tính chia

$$a) (5x^4 - 2x^3 + x^2) : 2x^2;$$

$$b) \left(xy^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{7}{2}x^3y\right) : 5xy;$$

$$c) (15x^3y^5 - 20x^4y^4 - 25x^5y^3) : -5x^3y^2;$$

$$d) \left(-\frac{10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xyz^4 - 5xyz^2\right) : \frac{10}{3}xyz.$$

4.(Dạng 2). Tính giá trị của biểu thức $(-15x^3y^5z^4) : (5x^2y^4z^4)$

$$\text{với } x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{3}{2}, z = 10000.$$

§ 12. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Phép chia hai đa thức đã sắp xếp thực hiện tương tự như phép chia hai số tự nhiên.
- Đối với hai đa thức một biến A, B tùy ý, $B \neq 0$ tồn tại hai đa thức duy nhất Q và R sao cho $A = B.Q + R$, Trong đó $R=0$ hoặc bậc của R thấp hơn bậc của B . Khi $R=0$ phép chia A cho B là phép chia hết.
- Muốn tìm hạng tử cao nhất của đa thức thương Q ta chia hạng tử cao nhất của đa thức bị chia A cho hạng tử cao nhất của đa thức chia B .
- Để tìm hạng tử thứ hai của đa thức thương ta chia hạng tử cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử cao nhất của đa thức chia.
- Chia đến khi nào bậc của đa thức dư R bé hơn bậc của đa thức chia B .

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. THỰC HIỆN PHÉP CHIA ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Sắp xếp đa thức một biến theo lũy thừa giảm dần.
- Các bước chia đa thức đã sắp xếp
- + Trình bày phép chia như phép chia số tự nhiên.

$$\begin{array}{r|l} A + B + C & D + E \\ \hline \end{array}$$

- + Chia hạng tử cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử cao nhất của đa thức chia ta được hạng tử cao nhất của đa thức thương.
- + Chia hạng tử cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử cao nhất của đa thức chia ta được hạng tử thứ hai của đa thức thương.
- ...

Chú ý. Nếu đa thức bị chia khuyết một bậc trung gian nào đó thì khi viết ta để trống một khoảng ứng với bậc khuyết đó.

Ví dụ 1. (Bài 67, trang 31 SGK)

Sắp xếp các đa thức sau rồi làm phép chia :

a) $(x^3 - 7x + 3 - x^2) : (x - 3)$

b) $(2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2 + 6x) : (x^2 - 2)$

Giải

a)

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 - 7x + 3 & x - 3 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 & x^2 + 2x - 1 \\
 \hline
 2x^2 - 7x + 3 & \\
 \hline
 2x^2 - 6x & \\
 \hline
 -x + 3 & \\
 \hline
 -x + 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Vậy $(x^3 - 7x + 3 - x^2) : (x - 3) = x^2 + 2x - 1$

b)

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & x^2 - 2 \\
 \hline
 2x^4 & -4x^2 \\
 \hline
 -3x^3 + x^2 + 6x - 2 & \\
 \hline
 -3x^3 & +6x \\
 \hline
 & x^2 - 2 \\
 \hline
 & x^2 - 2 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Vậy : $(2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2) : (x^2 - 2) = 2x^2 - 3x + 1$

Ví dụ 2. (Bài 69, trang 31 SGK)

Cho hai đa thức $A = 3x^4 + x^3 + 6x - 5$, $B = x^2 + 1$. Hãy chia A cho B rồi viết A dưới dạng $A = B.Q + R$

Giải

Thực hiện chia A cho B .

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 + x^3 + 6x - 5 & x^2 + 1 \\
 \hline
 3x^4 + & 3x^2 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 + 6x - 5 & \\
 \hline
 x^3 & + x \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 + 5x - 5 \\
 - \\
 \hline
 -3x^2 \quad -3 \\
 \hline
 -5x + 2
 \end{array}$$

Vậy: $3x^4 + x^3 + 6x - 5 = (x^2 + 1)(3x^2 + x - 3) + 5x - 2$

Ví dụ 3. (Bài 70, trang 32 SGK)

Làm tính chia:

a) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y$.

b) $(25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2$.

Giải

a) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y = \frac{5}{2}xy - 1 - \frac{1}{2}y$

b) $(25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2 = 5x^3 - x^2 + 2$

Ví dụ 4. (Bài 72, trang 32 SGK)

Làm tính chia: $(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2) : (x^2 - x + 1)$.

Giải

$2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2$	$x^2 - x + 1$
$-$	
$2x^4 - 2x^3 + 2x^2$	$2x^2 + 3x - 2$
$3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$	
$-$	
$3x^3 - 3x^2 + 3x$	
$-2x^2 + 2x - 2$	
$-$	
$-2x^2 + 2x - 2$	
0	

Dạng 2: TÍNH NHANH

Phương pháp giải

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.

Ví dụ 5. (Bài 68, trang 31 SGK). Tính nhanh:

a) $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$;

$$b) (125x^3 + 1) : (5x + 1); \quad c) (x^2 - 2xy + y^2) : (y - x)$$

Giải

$$a) (x^2 + 2xy + y^2) : (x + y) = (x + y)^2 : (x + y) = x + y$$

$$b) (125x^3 + 1) : (5x + 1) = 25x^2 + 5x + 1$$

$$c) (x^2 - 2xy + y^2) : (y - x) = (y - x)^2 : (y - x) = y - x$$

Ví dụ 6. (Bài 71, trang 32 SGK)

Không thực hiện phép chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đa thức B không.

$$a) A = 15x^4 - 8x^3 + x^2; \quad B = \frac{1}{2}x^2.$$

$$b) A = x^2 - 2x + 1; \quad B = 1 - x.$$

Giải

$$a) A \text{ chia hết cho } B \text{ vì } 15x^4, 8x^3 \text{ và } x^2 \text{ đều chia hết cho } \frac{1}{2}x^2.$$

$$b) A \text{ chia hết cho } B \text{ vì } A = (1 - x)^2.$$

Ví dụ 7. (Bài 73, trang 32). Tính nhanh:

$$a) (4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y)$$

$$b) (27x^3 - 1) : (3x - 1)$$

$$c) (8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1)$$

$$d) (x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y)$$

Giải

$$a) (4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y) = (2x - 3y)(2x + 3y) : (2x - 3y) = 2x + 3y$$

$$b) (27x^3 - 1) : (3x - 1) = 9x^2 + 3x + 1$$

$$c) (8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = 2x + 1$$

$$d) x^2 - 3x + xy - 3y = x(x - 3) + y(x - 3) = (x + y)(x - 3)$$

$$\text{Do đó: } (x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y) = x - 3$$

Dạng 3. ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ BÉZOUT ĐỂ PHÂN TÍCH ĐA THỨC RA THỪA SỐ

Phương pháp giải.

- **Định lý Bézout.**

Dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ là $f(a)$ ($f(a)$ là giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$).

- **Hệ quả.**

- Nếu $f(x)$ chia hết cho $x-a$ thì $f(a)=0$.

- Nếu $f(a)=0$ thì $f(x)$ chia hết cho $x-a$.

Chứng minh: Lấy $f(x)$ chia cho $x-a$ được dư là λ . Ta có:

$$f(x)=(x-a).q(x)+\lambda. \quad (1)$$

Thay $x=a$ vào (1) ta được: $f(a)=\lambda$. Vậy $f(a)$ là dư trong phép chia $f(x)$ cho $x-a$.

Ví dụ 8. (Bài 74, trang 32 SGK)

Tìm số a để đa thức $f(x)=2x^3-3x^2+x+a$ chia hết cho đa thức $x+2$

Giải

$f(x)$ chia hết cho $x+2$ khi $f(-2)=0$ tức là khi:

$$2.(-2)^3-3.(-2)^2+(-2)+a=0 \Rightarrow a=30.$$

Ví dụ 9. Cho đa thức $f(x)=3x^3-7x^2+4x-4$. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $x-2$.

Tìm thương trong phép chia $f(x)$ cho $x-2$. Từ đó hãy phân tích đa thức

$3x^3-7x^2+4x-4$ ra thừa số.

Giải

Thay $x=2$ vào $f(x)$ ta được: $f(2)=3.2^3-7.2^2+4.2-4=0$. Vậy $f(x)$ chia hết cho $x-2$.

Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-2$ ta được thương là $q(x)=3x^2-x+2$.

$$\text{Vậy: } 3x^3-7x^2+4x-4=(x-2)(3x^2-x+2.)$$

Dạng 4. TÌM SỐ NGUYÊN n ĐỂ BIỂU THỨC $A(n)$

CHIA HẾT CHO BIỂU THỨC $B(n)$.

Phương pháp giải.

- Thực hiện phép chia đa thức $A(n)$ cho $B(n)$.
- Giả sử: $\frac{A(n)}{B(n)}=Q(n)+\frac{R(n)}{B(n)}$. Xác định n để $\frac{R(n)}{B(n)}$ là số nguyên.

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị nguyên của n để $2n^2+3n+3$ chia hết cho $2n-1$.

Giải

Thực hiện phép chia $2n^2+3n+3$ cho $2n-1$ ta được:

$$\frac{2n^2+3n+3}{2n-1}=n+2+\frac{5}{2n-1}.$$

Để $\frac{2n^2+3n+3}{2n-1}$ là số nguyên thì $\frac{5}{2n-1}$ phải là số nguyên. Suy ra $2n-1$ là ước của 5. Ước của 5 bao gồm các số $\pm 1, \pm 5$.

Với $2n-1=-1$ ta có $n=0$.

Với $2n-1=1$ ta có $n=1$.

Với $2n-1=-5$ ta có $n=-2$.

Với $2n-1=1$ ta có $n=0$.

Với $2n-1=5$ ta có $n=3$.

Vậy với $n=0; 1; -2; 3$ thì $2n^2+3n+3$ chia hết cho $2n-1$.

Tóm lại $3x^4-4x^3+1=(x-1)^2(3x^2+2x+1)$.

- Tìm các nghiệm của đa thức với một biến nào đó đã cho.
- Áp dụng Định lý Bézout (dạng 3).

Để tìm dư trong phép chia $f(x)$ cho $x-\alpha$ và tìm đa thức thương $q(x)$ ta dùng các cách sau:

- + Thay một giá trị đặc biệt của x gọi là phương pháp xét giá trị riêng.
- + Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $f(x)$.
- + Dùng sơ đồ Horner để tính các hệ số của đa thức thương và dư như sau:

Giả sử: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$;

$q(x)=b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\dots+b_2x+b_1$.

Các hệ số của b_i được tính như sau :

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1
α	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1
	$=a_n$	$=\alpha b_n+a_{n-1}$	$=\alpha b_{n-1}+a_{n-2}$		$=\alpha b_1+a_0$

Dư là $\lambda=\alpha b_1+a_0$.

Chẳng hạn, phân tích $f(x)=3x^4-4x^3+1$ thành nhân tử. Ta có $x=1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ vì $f(1)=0$ nên $f(x)$ chia cho $x-1$. Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-1$ ta được thương $q(x)=3x^3-x^2-x-1$ hoặc dùng sơ đồ Horner như sau:

	3	-4	0	0	1
1	3	-1	-1	-1	0

Vậy $f(x)=(x-1)(3x^3-x^2-x-1)$.

Ta lại có $q(1)=0$ với $q(x)=3x^3-x^2-x-1$ nên

$$q(x) = (x-1)(3x^2 + 2x + 1)$$

	3	-1	-1	-1
1	3	2	1	

Dạng 5. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Phương pháp giải

Ví dụ 11. Phân tích thành nhân tử các đa thức sau bằng phương pháp xét giá trị riêng.

$$a) P = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a);$$

$$b) Q = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2);$$

Giải

a) Nếu thay a bởi b thì $P = b^2(b-b) + bc(b-c) + cb(c-b) = 0$ nên P chia hết cho $a-b$. Vì vai trò của a, b, c như nhau trong đa thức nên P chia hết cho $(a-b)(b-c)(c-a)$. Trong phép chia đó, đa thức bị chia P có bậc ba đối với các biến, đa thức chia $(a-b)(b-c)(c-a)$ cũng có bậc ba đối với các biến nên thương là hằng số k . Trong hằng đẳng thức :

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

Ta cho các biến nhận các giá trị riêng $a=2, b=1, c=0$ ta được:

$$2.1.1 + 0 + 0 = k.1.1.(-2) \Rightarrow k = -1.$$

$$\text{Vậy } P = (a-b)(b-c)(a-c).$$

$$b) \text{ Tương tự } Q = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Ví dụ 12. Phân tích đa thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ thành nhân tử.

Giải

Cách 1. Xem $f(x) = a^3 - 3abc + b^3 + c^3$ là đa thức bậc ba đối với a . Ta có:

$$f(-b-c) = -(b+c)^3 + 3(b+c)bc + b^3 + c^3 = 0.$$

$f(a)$ chia hết cho $a+b+c$. Thực hiện phép chia đa thức $f(a)$ cho $a+b+c$ hoặc dùng sơ đồ horner để tìm đa thức dư:

	1	0	$-3bc$	$b^3 + c^3$
$-b-c$	1	$-b-c$	$b^2 + c^2 - bc$	0

Đa thức thương $q(x) = a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc$.

$$\text{Vậy: } f(a) = (a+b+c)[a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc].$$

Hay: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Cách 2. Thay a bởi $-b - c$ thì đa thức có giá trị là 0 nên $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chia hết cho $a + b + c$.

P có bậc ba đối với các biến, $a + b + c$ và có bậc một nên thương là đa thức bậc hai đối với các biến và a, b, c có vai trò như nhau nên thương có dạng $k(a^2 + b^2 + c^2) + l(ab + bc + ca)$

với k, l là hằng số. Ta có hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[k(a^2 + b^2 + c^2) + l(ab + bc + ca)] .$$

Thay $a = 1, b = c = 0$ ta được $k = 1$.

Thay $a = b = 1, c = 0$ ta được: $2 = 2(2 + l)$ suy ra $l = -1$.

Vậy: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

Dạng 6. TÌM CÁC HỆ SỐ ĐỂ ĐA THỨC $f(x)$ CHIA HẾT CHO $g(x)$

Phương pháp giải

- Đa thức $f(x)$ gọi là chia hết cho đa thức $g(x)$ nếu có đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$.

Chẳng hạn: $x^4 + x^2 + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ vì

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

- Để xác định các hệ số của đa thức sao cho $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ ta sử dụng một trong các phương pháp:

+ Định lí Bezout: “ Nếu $f(x)$ chia hết cho $x - \alpha$ thì $f(\alpha) = 0$ ”.

+ Thực hiện phép chia đa thức tìm đa thức dư $r(x)$:

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x) , \text{ sau đó cho } r(x) \equiv 0$$

+ Dùng đồng nhất.

$$g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Tìm đa thức thương.

Giải

Cách 1. Phân tích $g(x)$ thành nhân tử:

$$g(x) = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2) .$$

Nếu $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì $f(x)$ chia hết cho $x - 1$ và chia hết cho $x - 2$. Theo định lí Bezout ta có: $f(1) = 0$ và $f(2) = 0$. Thay $x = 1; x = 2$ vào $f(x)$ ta được: $1 + a + b = 0$ và $16 + 4a + b = 0$. Từ đó suy ra $a = -5, b = 4$.

Thực hiện phép chia đa thức $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ cho đa thức $x^2 - 3x + 2$ ta được thương $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

Cách 2. Lấy đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $g(x)$ được đa thức dư $r(x) = (3a+15)x + b - 2a - 14$ và đa thức thương $q(x) = x^2 + 3x + a + 7$.

x^4	$-3x^3$	$+ax^2$	$+b$	$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + a + 7}$
x^4	$-3x^3$	$+2x^2$		
$3x^3 \quad + (a-2)x^2 \quad + b$				
	$3x^3$	$-9x^2$	$+6x$	
$(a+7)x^2 \quad -6x \quad + b$				
$(a+7)x^2 \quad -3(a+7)x \quad + 2(a+7)$				
$(3a+15)x + b - 2a - 14$				

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì dư $r(x) = (3a+15)x + b - 2a - 14$ phải đồng nhất bằng 0 tức là : $3a+15=0$ và $b-2a-14=0$. Suy ra $a=-5, b=4$. Khi đó đa thức thương $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

Cách 3. Giả sử đa thức thương $q(x) = x^2 + cx + d$. Ta có đồng nhất hai đa thức:

$$x^4 + ax^2 + b \equiv (x^2 - 3x + 2)(x^2 + cx + d).$$

Thực hiện phép nhân đa thức ở vế phải ta được:

$$x^4 - ax^2 + b = x^4 + (c-3)x^3 + (d+2-3c)x^2 + (2c-3d)x + 2d.$$

Từ đó suy ra : $c-3=0, d+2-3c=a, 2c-3d=0, b=2d$. Hay $c=3, d=2, a=-5, b=4$.

Vậy với $a=-5, b=4$ thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ và đa thức thương $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

Dạng 7. TÌM DƯ TRONG PHÉP CHIA ĐA THỨC

Phương pháp giải

- Dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $g(x)$ là đa thức $r(x)$ với bậc của $r(x)$ nhỏ hơn bậc của $g(x)$

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x) \text{ (bậc } r(x) < \text{ bậc } g(x)).$$

- Dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - \alpha$ là $f(\alpha)$. Để tính $f(\alpha)$ ta dùng sơ đồ Horner (xem dạng 5).

Thật vậy, giả sử : $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r$. Với $x = \alpha$ ta có: $f(\alpha) = r$.

Ví dụ 14. Tìm dư trong phép chia đa thức :

a) $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{100}$ cho $x+1$;

b) $f(x) = 2x^5 - 70x^3 + 4x^2 - x + 1$ cho $x-6$;

Giải

a) Dư trong phép chia $f(x)$ cho $x+1$ là $f(-1)=51$.

b) Dư trong phép chia $f(x)$ cho $x-6$ là $f(6)=571$.

	2	0	-70	4	-1	1
6	2	12	2	16	95	571

Ví dụ 15. Tìm dư trong phép chia đa thức $f(x)=x^5+x+1$ cho đa thức $g(x)=x^3-x$.

Giải

Cách 1. Thực hiện phép chia đa thức $f(x)$ cho $g(x)$ ta được:

$$\begin{array}{r|l} x^5 & +x+1 \\ -x^5 & -x^3 \\ \hline & x^3+x+1 \\ - & x^3-x \\ \hline & 2x+1 \end{array}$$

Do đó: $x^5+x+1=(x^3-x)(x^2+1)+2x+1$. Vậy dư cần tìm là $2x+1$.

Cách 2. Giả sử $f(x)=(x^3-x)q(x)+r(x)$. Vì bậc của $g(x)$ là 3 nên bậc của $r(x)$ không quá 2.

Đặt $r(x)=ax^2+bx+c$, ta có:

$$x^5+x+1=x(x-1)(x+1)q(x)+ax^2+bx+c \quad (1)$$

Lần lượt thay $x=0, -1, 1$ vào (1) ta được:

$$c=-1, a-b+c=3, a+b+c=-1.$$

Suy ra $a=0, b=2, c=1$. Vậy dư cần tìm là $2x+1$.

Ví dụ 16. Cho đa thức $f(x)$, các phần dư trong các phép chia $f(x)$ cho x và cho $x-1$ lần lượt là 1 và 2. Hãy tìm phần dư trong phép chia $f(x)$ cho $x(x-1)$.

Giải

Theo Định lí Bézout ta có $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Vì $x(x-1)$ có bậc hai nên dư trong phép chia $f(x)$ cho $x(x-1)$ có bậc không quá 1. Giả sử dư là $r(x)=ax+b$ ta có:

$$f(x)=x(x-1)q(x)+ax+b \quad (1)$$

Thay $x=0$ vào (1) ta được: $f(0)=b=1$.

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f(1)=a+b=2$.

Từ đó suy ra $a=b=1$. Vậy dư cần tìm là $x+1$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Sắp xếp các đa thức rồi làm phép chia:

a) $(6x^6+2x^5-2x^4-15x^3+x^2+7x-2):(x+3x^2-1);$

b) $(17x^2 - 6x^4 + 5x^3 - 23x + 7) : (7 - 3x^2 - 2x);$

2. (Dạng 2). Làm tính chia:

a) $(15x^3y^4 - 10x^2y^4 + 5xy^3) : (-5xy^2);$

b) $[7(2x - 5y)(2x + 5y) - 2(14x^2 - 3y^2)] : (-3y).$

3. (Dạng 2). Thực hiện phép chia đa thức sau đây bằng cách phân tích đa thức bị chia thành nhân tử:

a) $(x^5 + x^3 + x^2 + 1) : (x^3 + 1);$

b) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3);$

c) $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2).$

4. (Dạng 3). Xác định a để đa thức $x^3 - 3x + a$ chia hết cho $(x - 1)^2$.

5. (Dạng 4). Tìm tất cả số nguyên n để $2n^2 + n - 7$ chia hết cho $n - 2$.

6. (Dạng 5). Dùng sơ đồ Horner hãy phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 7x - 6;$

b) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10;$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$

d) $x^3 - 19x - 30.$

7. (Dạng 5). Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bằng phương pháp xét giá trị riêng:

a) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3;$

b) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b);$

c) $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5;$

d) $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

8. (Dạng 6). Xác định a, b để đa thức $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

9. (Dạng 6). Xác định m để đa thức $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ chia hết cho đa thức $x + y + z$.

10. (Dạng 7). Xác định a, b để đa thức $f(x) = x^{10} + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$ có dư là $2x + 1$

11. (Dạng 7). Tìm dư trong phép chia:

a) $f(x) = -x + 2x^2 - 3x^2 + \dots + (-1)^n nx^n$ cho $x + 1;$

b) $f(x) = x^{100} - x^{50} + 2x^{25} - 4$ cho $x^2 - 1.$

12. (Dạng 7). Xác định a, b để đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6 , chia cho $x - 2$ dư 21 .

A. BÀI TẬP ÔN TRONG SGK

75. Làm tính nhân:

a) $5x^2 \cdot (3x^2 - 7x + 2);$

b) $\frac{2}{3}xy \cdot (2x^2y - 3xy + y^2)$

Giải

a) $5x^2(3x^2 - 7x + 2) = 15x^4 - 35x^3 + 10x^2;$
b) $\frac{2}{3}xy \cdot (2x^2y - 3xy + y^2) = \frac{4}{3}x^3y^2 - 2x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3.$

76. Làm tính nhân:

a) $(2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1)$ b) $(x - 2y)(3xy + 5y^2 + x)$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1) &= 10x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 15x^3 + 6x^2 - 3x \\ &= 10x^4 - 19x^3 + 8x^2 - 3x. \\ \text{b) } (x - 2y)(3xy + 5y^2 + x) &= 3x^2y + 5xy^2 + x^2 - 6xy^2 - 10y^3 - 2xy = 3x^2y - xy^2 + x^2 - 10y^3 - 2xy \end{aligned}$$

77. Tính nhanh giá trị các biểu thức sau:

a) $M = x^2 + 4y^2 - 4xy$ tại $x=18$ và $y=4$;
b) $N = 8x^2 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ tại $x=6$ và $y=-8$.

Giải

a) Ta có $M = (x - 2y)^2$. Với $x = 18$ và $y = 4$ thì:
 $M = (18 - 2.4)^2 = 10^2 = 100$.

b) $N = (2x - y)^3$. Với $x = 6$ và $y = -8$ thì:
 $N = (2.6 + 8)^3 = 8000$.

78. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x+2)(x-2)-(x-3)(x+1)$;
b) $(2x+1)^2+(3x-1)^2+2(2x+1)(3x-1)$.

Giải

a) Ta có $(x+2)(x-2)-(x-3)(x+1)=x^2-4-(x^2+2-3x-3)$
 $=x^2-4-x^2-x+3x+3$
 $=2x-1$

b) $(2x+1)^2+(3x-1)^2+2(2x+1)(3x-1)=[(2x+1)+(3x-1)]^2$
 $= (5x^2) = 25x^2.$

79. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 4 + (x - 2)^2$ b) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$
b) $x^3 - 4x^2 - 12x + 27$

Giải

a) $x^2 - 4 + (x-2)^2 = (x-2)(x+2) + (x-2)^2$
 $= (x-2)[(x+2) + (x-2)] = 2x(x-2)$

b) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1) - xy^2 = x[(x-1)^2 - y^2]$
 $= x(x-1-y)(x-1+y)$

c)
$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 12x + 27 &= (x^3 + 27) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 4(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - 3x + 5). \end{aligned}$$

80. Làm tính chia:

a) $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1)$

b) $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3)$

c) $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3).$

Giải

a)

$6x^3 - 7x^2 - x + 2$	$2x + 1$
$6x^3 + 3x^2$	$3x^2 - 5x + 2$
$-10x^2 - x + 2$	
$-10x^2 - 5x$	
$4x + 2$	
$4x + 2$	
0	

Vậy $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1) = 3x^2 - 5x + 2$

b)

$x^4 - x^3 + x^2 + 3x$	$x^2 - 2x + 3$
$x^4 - 2x^3 + 3x^2$	$x^2 + x$
$x^3 - 2x^2 + 3x$	
$x^3 - 2x^2 + 3x$	
0	

Vậy: $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3) = x^2 + x$

$$\begin{aligned}\text{c) } x^2 - y^2 + 6x + 9 &= (x^2 + 6x + 9) - y^2 = (x + 3)^2 - y^2 \\ &= (x + 3 - y)(x + 3 + y)\end{aligned}$$

Do đó: $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3) = (x + 3 - y)(x + 3 + y)$

81. Tìm x , biết:

a) $\frac{2}{3}x(x^2 - 4) = 0$

$$\text{b) } (x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0$$

c) $x + 2\sqrt{2}x^2 + 2x^3 = 0$.

Giải

a) Ta có: $\frac{2}{3}x(x^2 - 4) = \frac{2}{3}x(x-2)(x+2)$. Do đó:

$$\frac{2}{3}x(x-2)(x+2) = 0 \text{ khi } x = 0, x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

b) $(x+2)^2 - (x-2)(x+2) = (x+2)(x+2-x+2) = 4(x+2)$.

Vậy $4(x+2) = 0$ khi $x = -2$.

c) $x(1+2\sqrt{2}x+2x^2) = 0$ hay $x(1+2\sqrt{2}x)^2 = 0$.

Vậy $x = 0, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

82. Chứng minh rằng:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 1 > 0$ với mọi x, y ;

b) $x - x^2 - 1 < 0$ với mọi x

Giải

a) Ta có $x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x-y)^2 + 1$. Vì $(x-y)^2 \geq 0$ nên $(x-y)^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi x, y

b)
$$\begin{aligned} x - x^2 - 1 &= -(x^2 - x) - 1 = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \text{ với mọi } x. \end{aligned}$$

83. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n+1$

Giải

Ta có: $2n^2 - n + 2 = (2n+1)(n-1) + 3$.

$2n^2 - n + 2$ chia hết cho $2n+1$ khi $2n+1$ là ước của 3.

Ước của 3 bao gồm $\pm 1, \pm 3$.

Từ đó tìm được $n \in \{-1; 0; 1; -2\}$.

B. BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a) $a^3 - 7a - 6$;

b) $a^3 + 4a^2 - 7a - 10$;

c) $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$;

d) $(a^2 + a)^2 + 4(a^2 + a) - 12$;

e) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

f) $x^8 + x + 1$;

g) $x^{10} + x^5 + 1$;

h) $x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$;

i) $(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3$.

2. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa điều kiện $ab + ac + bc = 1$. Chứng minh rằng $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là bình phương của một số hữu tỉ.
3.
 - a) Phân tích thành nhân tử $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;
 - b) Chứng minh rằng nếu $x^2 - yz = z$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$ ($x, y, z \in \mathbb{Z}$) thì $ax + by + cz$ chia hết cho $a + b + c$.
4. Tìm các cặp số $(x; y); x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn đẳng thức:
 - a) $x + y = xy$
 - b) $5xy - 2y^2 - 2x^2 = -2$.
5. Xác định a sao cho $(10x^2 - 7x + a)$ chia hết cho $(2x - 3)$.
6. Tính giá trị của biểu thức $x^3 + 3xy + y^3$ biết $x + y = 1$.