

§1. ĐA GIÁC. ĐA GIÁC ĐỀU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

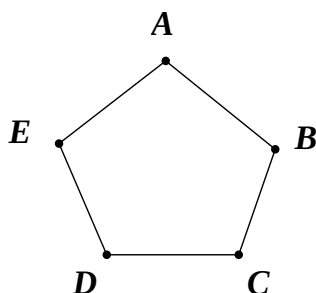
1. Định nghĩa

Đa giác $A_1A_2...A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ trong đó bất kì đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Chú ý. Từ nay khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

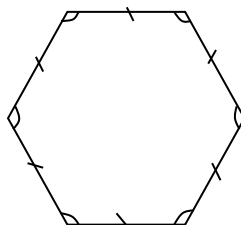


Ngũ giác

2. Tính chất

Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n-2).180^\circ$ hay $(n-2).2v$.

Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$.



Lục giác đều

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. NHẬN BIẾT ĐA GIÁC

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa đa giác.

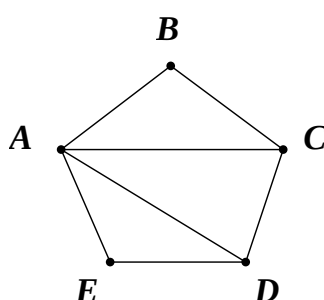
Ví dụ 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Kẻ các đường chéo AC, AD . Kể tên các đa giác có trong hình vẽ.

Giải

Có ba tam giác là ABC, ACD, ADE .

Có hai tứ giác là $ABCD, ACDE$.

Có một ngũ giác là $ABCDE$.



Dạng 2. TÍNH CHẤT VỀ GÓC CỦA ĐA GIÁC

Phương pháp giải

Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng $(n-2).2v$ hay $(n-2).180^\circ$.

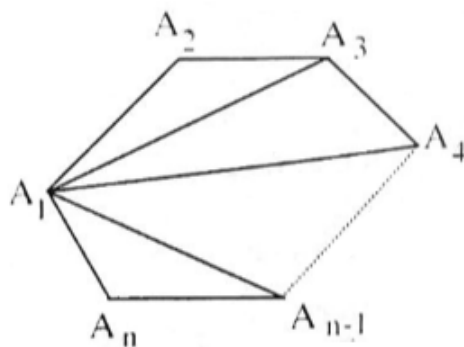
Ví dụ 1. Chứng minh định lí: Tổng số đo các góc của hình n -giác bằng $(n-2).180^\circ$.

Giải

Xét hình n -giác $A_1A_2\dots A_n$. Kẻ các đường chéo xuất phát từ A_1 , ta được $n-2$ tam giác (có cạnh đối diện với A là: $A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$).

Tổng số đo các góc của n -giác bằng tổng số đo các góc của $n-2$ tam giác trên. Mỗi tam giác đó có tổng số đo góc bằng 180° .

Vậy Tổng số đo các góc của hình n -giác bằng $(n-2).180^\circ$.



Dạng 3. TÍNH CHẤT VỀ SỐ ĐƯỜNG CHÉO CỦA ĐA GIÁC

Phương pháp giải

Trước hết xét số đường chéo xuất phát từ một đỉnh.

Ví dụ 1. Tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác, hình n – giác.

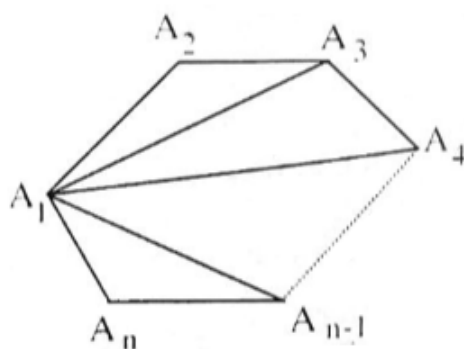
Giải

(Đối với hình n – giác $A_1A_2...A_n$) từ đỉnh A_1 chẳng hạn, vẽ được $n-3$ đường chéo:

$A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}$ (nối A_1 với các đỉnh của đa giác, trừ ba đỉnh A_1, A_2, A_n).

Với n đỉnh, có $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo đã được tính hai lần.

Vậy số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$.



Dạng 4. ĐA GIÁC ĐỀU

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa đa giác đều, công thức tính góc của đa giác đều.

Ví dụ 1. (Bài 2 SGK)

Cho ví dụ về đa giác không đều trong mỗi trường hợp sau:

- Có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Có tất cả các góc bằng nhau.

Giải

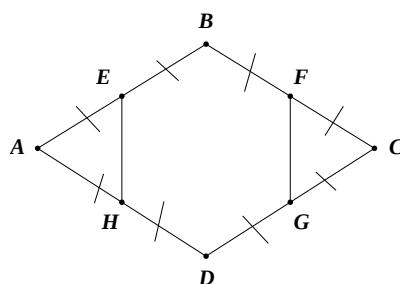
- a) Hình thoi $ABCD$ với $\hat{A} \neq 90^\circ$ có các cạnh bằng nhau nhưng không là đa giác đều (vì các góc không bằng nhau).
- b) Hình chữ nhật $ABCD$ với $AB > AD$ có các góc bằng nhau nhưng không là đa giác đều (vì các cạnh không bằng nhau).

Ví dụ 2. (Bài 3 SGK)

Cho hình thoi $ABCD$ với $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng đa giác $EBFGDH$ là lục giác đều.

Hướng dẫn

Chứng minh lục giác $EBFGDH$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (120°).



Ví dụ 3. (Bài 5 SGK)

Tính số đo mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, n – giác đều.

Đáp số

$$108^\circ, 120^\circ, \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

C. LUYỆN TẬP

- (Dạng 1). Cho lục giác $ABCDEF$. Kẻ các đường chéo AC, AD, AE . Kể tên các đa giác trong hình vẽ.
- (Dạng 2). Tính tổng số đo các góc của đa giác 12 cạnh.
- (Dạng 2). Tính số cạnh của đa giác có tổng số đo các góc bằng 1080° .
- (Dạng 2). Ta gọi góc ngoài của đa giác là góc kề bù với một góc của đa giác. Ta coi ở mỗi đỉnh của đa giác có một góc ngoài.
 - Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của bất kì của đa giác nào cũng bằng 360° .
 - Đa giác nào có tổng các góc trong gấp đôi tổng các góc ngoài?
- (Dạng 3). Đa giác nào có số đường chéo:
 - Bằng số cạnh?

b) Gấp đôi số cạnh?

6. (Dạng 3). Cho lục giác $ABCDEF$ có các cạnh đối AB và DE , BC và EF , CD và FA song song và bằng nhau. Chứng minh rằng các đường chéo AD , BE và CF của lục giác cắt nhau tại một điểm O và O' chia mỗi đường chéo thành hai đoạn bằng nhau.
7. (Dạng 3). Chứng minh rằng trong ngũ giác, tổng các đường chéo lớn hơn chu vi.
8. (Dạng 4). Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng 108° . Tìm n
9. (Dạng 4). Cho tam giác đều ABC . Trên cạnh AB lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Trên cạnh BC lấy các điểm F, H sao cho $BF = FH = HC$. Trên cạnh CA lấy các điểm I, K sao cho $CI = IK = KA$. Chứng minh rằng $DEFHIK$ là lục giác đều.
10. (Dạng 4). Chứng minh trung điểm các cạnh của một ngũ giác đều là đỉnh của một ngũ giác đều.

§2. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm diện tích đa giác

Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là *diện tích đa giác* đó. Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một *số dương*.

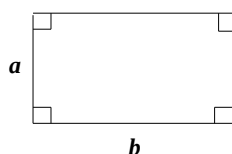
Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
- Nếu chọn hình vuông có cạnh $1cm, 1dm, 1m, \dots$ làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là $1cm^2, 1dm^2, 1m^2, \dots$

2. Công thức tính diện tích hình chữ nhật, hình vuông, tam giác vuông

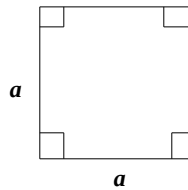
- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó:

$$S = a.b.$$



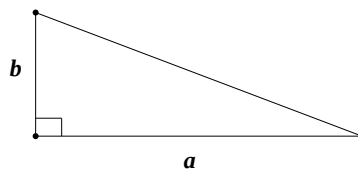
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó:

$$S = a^2.$$



- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông:

$$S = \frac{1}{2} a.b.$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH CHẤT DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Phương pháp giải.

Sử dụng tính chất của diện tích.

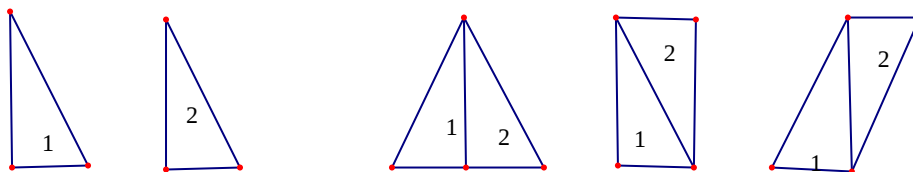
Ví dụ 1: (Bài 11 SGK)

Cắt hai tam giác vuông bằng nhau từ một tấm bìa. Hãy ghép hai tam giác đó để tạo thành:

- Một tam giác cân
- Một hình chữ nhật;
- Một hình bình hành.

Diện tích của các hình này có bằng nhau không? Vì sao?

Giải.



Ghép như hình trên. Các hình này có diện tích bằng nhau theo tính chất thứ hai của diện tích.

Dạng 2: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT.

Phương pháp giải.

Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật.

Ví dụ 2: (Bài 6 SGK)

Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

- a) Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng không đổi?
- b) Chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần?
- c) Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 4 lần?

Giải:

Lúc đầu, hình chữ nhật có chiều dài a , chiều rộng b , diện tích $S = ab$.

Sau khi thay đổi, hình chữ nhật có chiều dài a' , chiều rộng b' , diện tích $S' = a'b'$.

- a) Nếu $a' = 2a$, $b' = b$ thì $S' = 2a'b = 2S$.
- b) Nếu $a' = 3a$, $b' = 3b$ thì $S' = 3a.3b = 9ab = 9S$.
- c) Nếu $a' = 4a$, $b' = \frac{b}{4}$ thì $S' = 4a.\frac{b}{4} = ab = S$.

Ví dụ 3: (Bài 7SGK)

Một gian phòng có nền hình chữ nhật với kích thước là 4,2 m và 5,4 m, có một cửa sổ hình chữ nhật kích thước 1 m và 1,6 m và một cửa ra vào hình chữ nhật kích thước 1,2 m và 2 m. Ta coi một gian phòng đạt mức chuẩn ánh sáng nếu diện tích các cửa bằng 20% diện tích nền nhà. Hỏi gian phòng trên có đạt mức chuẩn về ánh sáng không?

Giải.

Diện tích S của nền nhà bằng: $4,2.5,4 = 22,68 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích S' của các cửa bằng: $1,1,6 + 1,2.2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}$.

Ta thấy $\frac{S'}{S} = \frac{4}{22,68} \approx 17,6\% < 20\%$.

Vậy gian phòng không đạt chuẩn về ánh sáng.

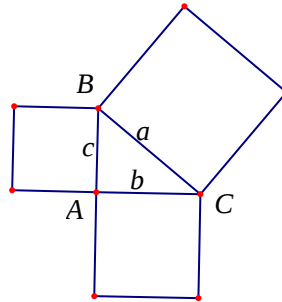
Dạng 3. DIỆN TÍCH HÌNH VUÔNG

Phương pháp giải

Sử dụng công thức diện tích hình vuông.

Ví dụ 4: (Bài 10 SGK)

Cho một tam giác vuông. Hãy so sánh tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông với diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền.



Giải.

Giả sử tam giác ABC có cạnh huyền là a và hai cạnh góc vuông là b, c .

Diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền a là a^2 .

Tổng diện tích hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông b và c là $b^2 + c^2$

Theo định lí Pi-ta-go, ta có: $a^2 = b^2 + c^2$.

Vậy: Trong một tam giác vuông, tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền.

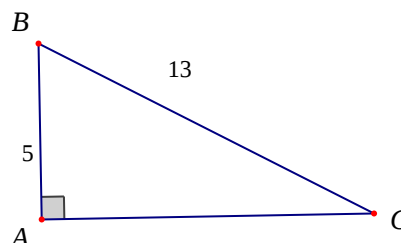
Dạng 4. DIỆN TÍCH TAM GIÁC VUÔNG.

Phương pháp giải.

Sử dụng công thức tính diện tích hình vuông. Chú ý sử dụng định lí Pi-ta-go.

Ví dụ 5: Tính diện tích tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 5\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$.

Giải:

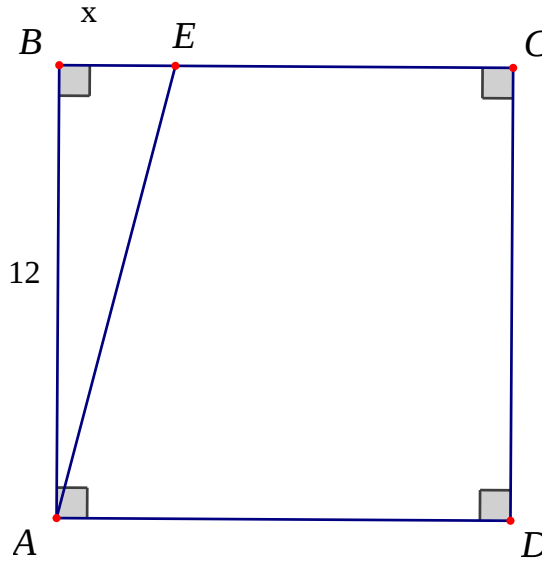


$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AC = 12\text{cm}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 (\text{cm}^2)$$

Ví dụ 6: (Bài 9 SGK)

$ABCD$ là hình vuông cạnh 12 cm. $AE = x$. Tính x sao cho diện tích tam giác ABE bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vuông $ABCD$.



Giải.

Diện tích tam giác ABE là $6x$ (cm^2).

Diện tích hình vuông $ABCD$ là 144 (cm^2).

Theo đề bài, ta có $6x = \frac{144}{3} \Rightarrow x = 8(\text{cm})$.

Ví dụ 7: (Bài 13 SGK)

Cho hình 125, trong đó $ABCD$ là hình chữ nhật, E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC .

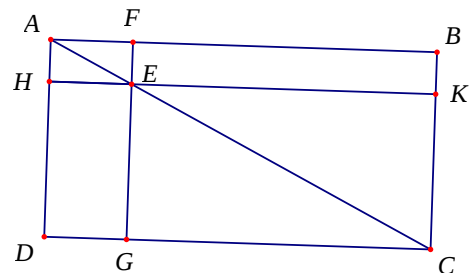
$FG \parallel AD$ và $HK \parallel AB$. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật $EFBK$ và $EGDH$ có cùng diện tích.

Giải.

Ta có $S_{ABC} = S_{ADC}$;

$$S_{AEF} = S_{AHE};$$

$$S_{EKC} = S_{EGC}.$$



Suy ra:

$$S_{ABC} - S_{AEF} - S_{EKC} = S_{ADC} - S_{AHE} - S_{EGC}$$

Vậy $S_{BKEF} = S_{EGDH}$

Ví dụ 8: (Bài 15 SGK)

Vẽ hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$.

- Hãy vẽ một hình chữ nhật có diện tích nhỏ hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ được mấy hình như vậy?
- Hãy vẽ hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ được mấy hình vuông như vậy? So sánh diện tích hình chữ nhật với diện tích hình vuông có cùng chu vi vừa vẽ.
- Tại sao trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất?

Giải.

- Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 15 cm^2 . Chu vi 16 cm . Chẳng hạn hình chữ nhật có kích thước $2 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ thì diện tích bằng 14 cm^2 (nhỏ hơn diện tích $ABCD$), chu vi 18 cm , (lớn hơn chu vi $ABCD$).
- Hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật $ABCD$ thì cạnh bằng $16:4 = 4$ (cm), diện tích bằng $4 \cdot 4 = 16 (\text{cm}^2)$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ nhỏ hơn diện tích hình vuông (vì $15 < 16$).
- Ta chứng minh được trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng $2p$ thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

Thật vậy, gọi a và b là kích thước của hình chữ nhật, ta có $a + b = p$, diện tích hình chữ nhật là $S = ab$.

Hình vuông có chu vi p thì cạnh bằng $\frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$, diện tích là $S' = \frac{p^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$.

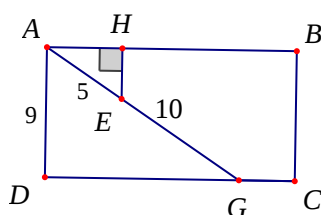
Xét hiệu:

$$S' - S = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0.$$

Vậy $S' \geq S$. Dấu bằng xảy ra (tức $S = S'$) khi và chỉ khi $a = b$.

C. LUYỆN TẬP.

1. (Dạng 1)

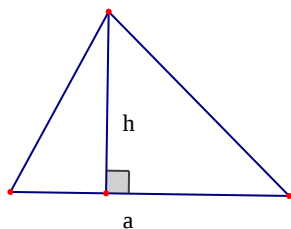


- a) Hình chữ nhật $ABCD$ được cắt ghép thành 3 mảnh như ở hình bên. Hãy ghép 3 mảnh đó lại để được hình vuông.
- b) Hãy chia hình chữ nhật kích thước 9×16 nói trên thành 2 mảnh rồi ghép lại thành một hình vuông.
2. (Dạng 2). Cho hình thoi có hai đường chéo bằng a và b . Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thoi.
3. (Dạng 2). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 14$ cm, $BD = 50$ cm. O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC, OD . Tính diện tích tứ giác $EFGH$.
4. (Dạng 3). Diện tích một hình vuông tăng bao nhiêu phần trăm nếu mỗi cạnh của nó tăng thêm 20%.
5. (Dạng 3). Một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau, độ dài hai đường chéo bằng 4 cm. Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình thang cân đó.
6. (Dạng 4). Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm, tổng hai cạnh góc vuông bằng 14 cm.
7. Tính diện tích hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$) có $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm, $\widehat{ABC} = 135^\circ$.
8. Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 100m^2 , hình nào có chu vi nhỏ nhất?

§3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Diện tích tam giác bằng một nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:



$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Từ đó suy ra:

- Nếu hai tam giác có một cạnh bằng nhau thì tỉ số diện tích của hai tam giác đó bằng tỉ số các chiều cao tương ứng.

- Nếu hai tam giác có một đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích hai tam giác đó bằng tỉ số các cạnh tương ứng.

B. CÁC DẠNG TOÁN

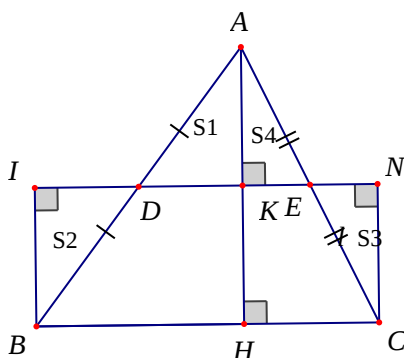
Dạng 1. CẮT VÀ GHÉP HÌNH. GIẢI THÍCH CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC.

Phương pháp giải.

Đưa việc tính diện tích tam giác về việc tính diện tích hình chữ nhật.

Ví dụ 1: (Bài 20 SGK)

Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng cạnh của một tam giác cho trước và có diện tích bằng diện tích của tam giác đó. Từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức tính diện tích tam giác.



Giải.

Dựng hình chữ nhật có một cạnh là cạnh của tam giác, cạnh đối diện thuộc đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh kia.

Để chứng minh diện tích tam giác bằng diện tích hình chữ nhật, ta kẻ AK vuông góc với DN (nếu chọn BC là cạnh lớn nhất của tam giác ABC thì AK không nằm ngoài tam giác). Dễ thấy $S_1 = S_2, S_3 = S_4$ nên $S_{ABC} = S_{BINC}$.

Như vậy $S_{ABC} = S_{BINC} = BC.KH = \frac{1}{2}BC.AH$. Điều này cho ta một cách chứng minh công thức tính diện tích tam giác.

Dạng 2: TÍNH TOÁN, CHỨNG MINH VỀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC.

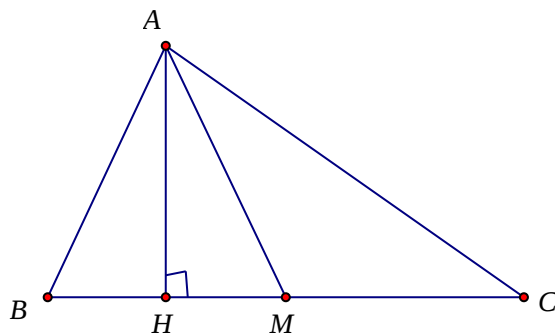
Phương pháp giải

Sử dụng công thức tính diện tích tam giác

Ví dụ 2: (Bài 18 SGK) Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AM (H.132 SGK).

Chứng minh $S_{AMB} = S_{AMC}$.

Giải.



Kẻ $AH \perp BC$. Ta có:

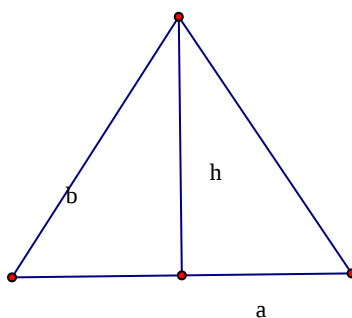
$$S_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AH; S_{AMC} = \frac{1}{2} MC \cdot AH.$$

Do $BM = MC$ nên $S_{AMB} = S_{AMC}$.

Ví dụ 3: (Bài 24 SGK)

Tính diện tích của một tam giác cân có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b .

Giải.



Gọi h là chiều cao của tam giác cân có đáy là a và cạnh bên là b . Theo định lí Pi-ta-go, ta có:

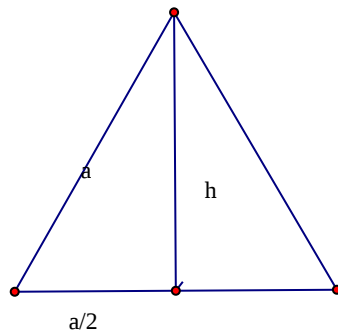
$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} = \frac{1}{4} a \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Ví dụ 4 (Bài 25 SGK)

Tính diện tích của một tam giác đều có cạnh bằng a .

Giải.



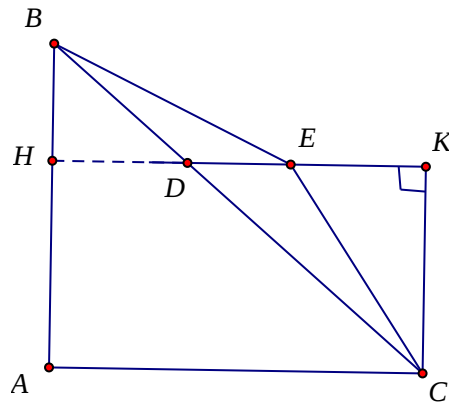
Gọi h là chiều cao của tam giác đều cạnh a . Theo định lí Pi-ta-go, ta có:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2}.a.h = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$ cm. Qua điểm D thuộc cạnh BC , Kẻ các đoạn thẳng DE nằm ngoài tam giác ABC sao cho $DE \parallel AC$ và $DE = 4$ cm. Tính diện tích tam giác BEC .

Giải.



Gọi H là giao điểm của DE và AB . Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ C đến DE . Ta có:

$$\begin{aligned} S_{BEC} &= S_{BDE} + S_{CDE} \\ &= \frac{1}{2}DE.BH + \frac{1}{2}DE.CK \\ &= \frac{1}{2}DE.(BH + CK) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} DE.(BH + AH)$$

$$= \frac{1}{2} DE.AB = \frac{1}{2}.4.6 = 12(\text{cm}^2).$$

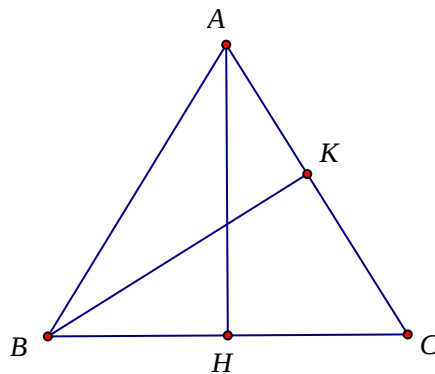
Dạng 3. TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG BẰNG CÁCH SỬ DỤNG CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC.

Phương pháp giải.

Từ công thức $S = \frac{1}{2}ah$ suy ra $a = \frac{2S}{h}$, $h = \frac{2S}{a}$.

Ví dụ 6. Tam giác cân ABC ($AB = AC$) có $BC = 30$ cm, đường cao $AH = 20$ cm. Tính đường cao ứng với cạnh bên.

Giải.



Kẻ $AH \perp AC$.

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 20^2 + 15^2 = 625.$$

Suy ra $AC = 25$ cm.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2}.30.20 = 300(\text{cm}^2)$$

$$BK = \frac{2S}{AC} = \frac{2.300}{25} = 24(\text{cm}).$$

Dạng 4. SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC.

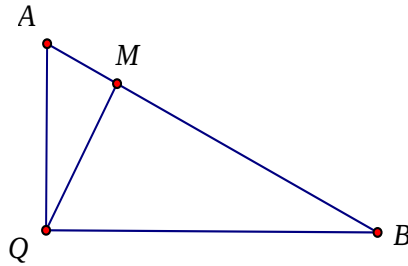
Phương pháp giải.

Phát hiện quan hệ về diện tích trong hình rồi sử dụng các công thức diện tích.

Ví dụ 7. (Bài 17 SGK)

Cho tam giác AOB vuông tại O với đường cao OM (Hình 131 SGK). Hãy giải thích vì sao ta có đẳng thức $AB \cdot OM = OA \cdot AB$.

Giải.

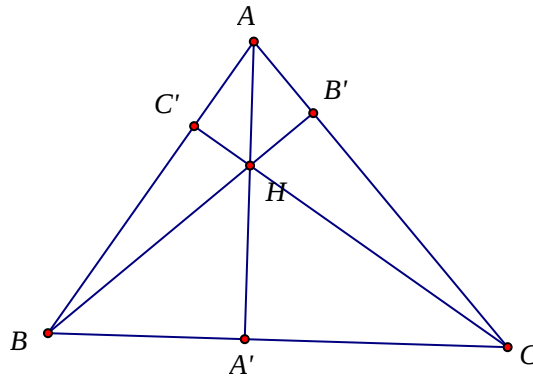


Ta có $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM$. Ta lại có $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB$. Vậy: $AB \cdot OM = OA \cdot AB$.

Ví dụ 8: Cho Tam giác nhọn ABC , các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H .

Chứng minh rằng: $\frac{HA}{AA'} + \frac{HB}{BB'} + \frac{HC}{CC'} = 1$.

Giải.



Gọi $S_{ABC} = S$. Các tam giác HBC và ABC có chung đáy BC nên tỉ số hai đường cao bằng tỉ số hai diện tích:

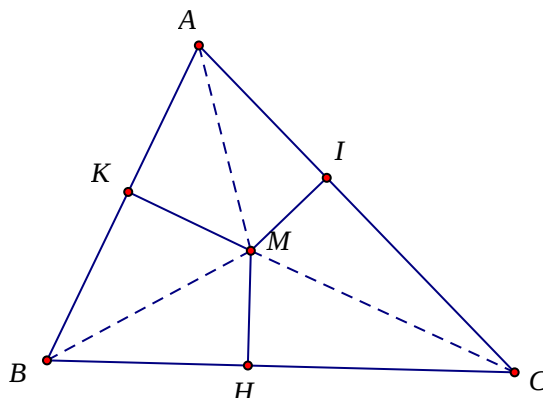
$$\frac{HA}{AA'} = \frac{S_{HBC}}{S}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{HB}{BB'} = \frac{S_{HAC}}{S}, \frac{HC}{CC'} = \frac{S_{HAB}}{S}$$

$$\text{Do đó: } \frac{HA}{AA'} + \frac{HB}{BB'} + \frac{HC}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S} + \frac{S_{HAC}}{S} + \frac{S_{HAB}}{S} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến ba cạnh của tam giác không phụ thuộc vào vị trí của điểm đó trong tam giác.

Giải.



Gọi M là điểm bất kì trong tam giác đều ABC . Kẻ $MH \perp BC, MI \perp AC, MK \perp AB$.

Đặt $AB = BC = CA = a$. Gọi h là chiều cao của tam giác đều. Ta có:

$$S_{BMC} + S_{AMC} + S_{AMB} = S_{ABC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{2} \cdot MH + \frac{a}{2} \cdot MI + \frac{a}{2} \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot h$$

$$\text{Hay } MH + MI + MK = h.$$

Vậy khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến ba cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm đó trong tam giác.

Dạng 5. TÌM VỊ TRÍ CỦA ĐIỂM ĐỂ THỎA MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH.

Phương pháp giải.

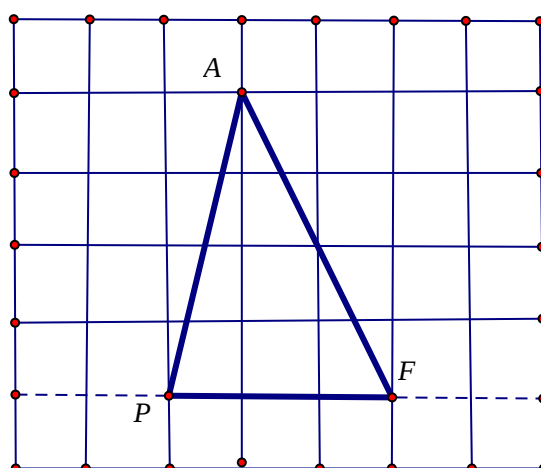
Dùng công thức tính diện tích dẫn đến điều kiện vị trí của điểm, thường liên quan đến khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Ví dụ 10. (Bài 22 SGK)

Tam giác PAF được vẽ trên giấy kẻ ô vuông (H. 135 SGK). Hãy chỉ ra:

- Một điểm I sao cho $S_{PIF} = S_{PAF}$;
- Một điểm O sao cho $S_{POF} = 2 \cdot S_{PAF}$;
- Một điểm N sao cho $S_{PNF} = \frac{1}{2} S_{PAF}$.

Giải.



- Lấy một điểm I thuộc dòng kẻ song song với PF và cách PF 4 đơn vị dài.
- Lấy điểm O thuộc dòng kẻ song song với PF và cách PF 8 đơn vị dài.
- Lấy điểm N thuộc dòng kẻ song song với PF và cách PF 2 đơn vị dài.

Ví dụ 11. (Bài 23 SGK)

Cho tam giác ABC . Hãy chỉ ra một số vị trí của điểm M trong tam giác đó sao cho

$$S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}.$$

Giải.

Theo giả thiết thì M là điểm nằm trong tam giác, sao cho:

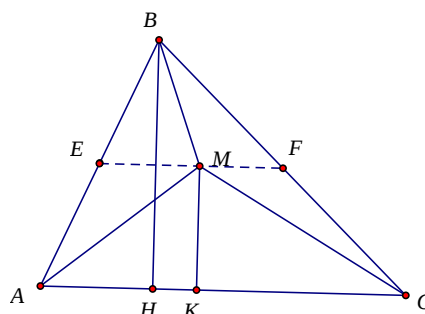
$$S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$$

Nhưng $S_{AMB} + S_{BMC} + S_{MAC} = S_{ABC}$, suy ra :

$$S_{MAC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Tam giác MAC và tam giác ABC có chung đáy BC nên $MK = \frac{1}{2} BH$.

Vậy điểm M nằm trên đường trung bình EF của tam giác ABC .



Dạng 6. TÌM DIỆN TÍCH LỚN NHẤT (NHỎ NHẤT) CỦA MỘT HÌNH.

Phương pháp giải.

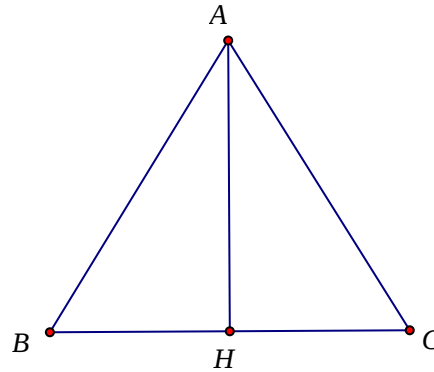
Nếu diện tích của một hình luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số m , và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng m thì m là diện tích lớn nhất của hình đó. Một trong các bất đẳng thức hình học được sử dụng là đường vuông góc ngắn

hơn đường xiên.

Ta cũng kí hiệu $\max S$ là giá trị lớn nhất của biểu thức S , $\min S$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức S .

Ví dụ 12. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC có $AB = 2\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$.

Giải.



Kẻ $AH \perp BC$. Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH \leq \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3(\text{cm}^2) \quad \max S = 3\text{cm}^2 \Leftrightarrow AH = AB \Leftrightarrow AB \perp BC$$

C. LUYỆN TẬP.

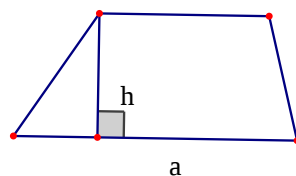
- (Dạng 1). Cho một miếng bìa hình tam giác. Hãy cắt tấm bìa đó thành một số mảnh rồi ghép lại thành một hình chữ nhật.
- (Dạng 2). Cho tam giác ABC , đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết $AB = 15\text{cm}$, $AC = 41\text{cm}$, $HB = 12\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC ,
- (Dạng 2). Tam giác ABC có đáy $BC = 60\text{ m}$, chiều cao tương ứng 40 m . Gọi D và E thứ tự là trung điểm của AB, AC . Tính diện tích tứ giác $BDEC$.
- (Dạng 2) Cho tam giác ABC có diện tích 60 m^2 , G là trọng tâm của tam giác. Tính diện tích tam giác BGC .
- (Dạng 2) Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$, các đường phân giác cắt nhau ở I , khoảng cách từ I đến BC bằng d . Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c, d .
- (Dạng 2). Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE . Cho biết $BC = 10\text{ cm}$, $BD = 9\text{ cm}$, $CE = 12\text{ cm}$.
 - Chứng minh $BD \perp CE$
 - Tính diện tích tam giác ABC .
- (Dạng 3). Cho tam giác ABC , $AB = AC = 10\text{ cm}$, $BC = 12\text{ cm}$. Tính đường cao BK .
- (Dạng 3). Một tam giác cân có đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15 cm , đường cao ứng với cạnh bên bằng 20 cm . Tính các cạnh của tam giác đó (chính xác đến $0,1\text{ cm}$).

9. (Dạng 4). Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với đáy, cắt AD và BC tại E và G . Chứng minh rằng:
- $S_{AOD} = S_{BOC}$;
 - $OE = OG$.
10. (Dạng 4) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Biết diện tích tam giác AOB bằng 9 cm^2 , diện tích tam giác COD bằng 16 cm^2 .
- Tính diện tích các tam giác AOD , BOC .
 - Tính diện tích hình thang $ABCD$.
11. (Dạng 4). Cho tam giác ABC cân tại A , điểm M thuộc đáy BC . Gọi BD là đường cao của tam giác ABC , H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Dùng công thức diện tích để chứng minh $MH + MK = BD$.
12. (Dạng 4). Cho tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác AD . Đặt $AC = b$, $AB = c$. Gọi d là khoảng cách từ D đến AB . Chứng minh rằng $d = \frac{bc}{b+c}$.
13. (Dạng 4). Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình vuông $ABDE$, $ACFG$, $BCMN$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt MN ở K . Chứng minh rằng:
- $S_{ABDE} = S_{BHKN}$;
 - $S_{ACFG} = S_{CHKM}$.
14. (Dạng 5). Các đỉnh A của tam giác ABC có đáy $BC = 3 \text{ cm}$, diện tích bằng 3 cm^2 chuyển động trên đường nào?
15. (Dạng 6). Tính diện tích lớn nhất của tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = a$.
16. (Dạng 6). Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng 10 cm , hình nào có diện tích lớn nhất?

§4. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

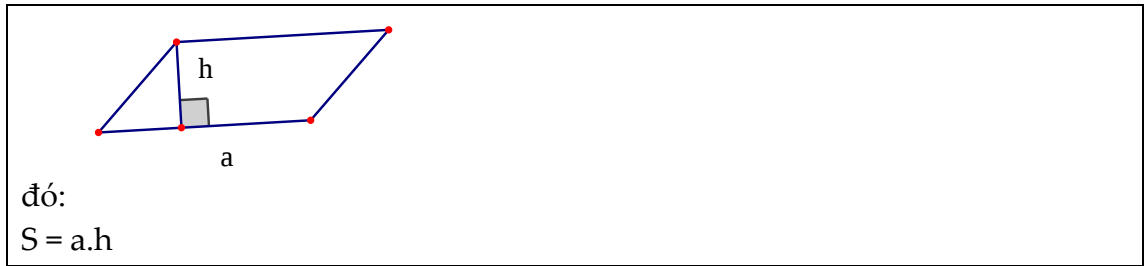
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Diện tích hình thang bằng nửa tổng hai đáy với chiều cao:



$$S = \frac{1}{2}(a+b).h$$

Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh



B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH THANG

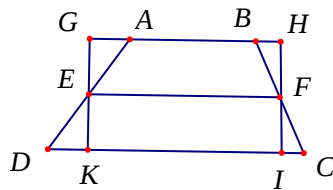
Phương pháp giải

Sử dụng công thức tính diện tích hình thang

Ví dụ 1: (Bài 30 SGK)

Trên hình 143 SGK ta có hình thang $ABCD$ với đường trung bình EF và hình chữ nhật $GHIK$. Hãy so sánh diện tích hai hình này, từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức diện tích hình thang.

Giải



Ta có: $\triangle AEG = \triangle DEK$ (cgc), $\triangle BFH = \triangle CFI$ (cgc). Do đó: $S_{ABCD} = S_{GHIK}$.

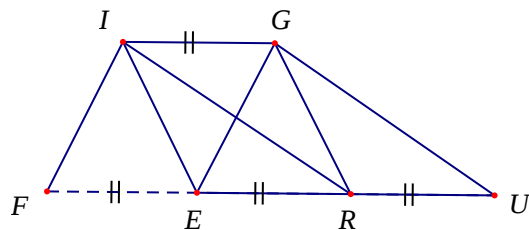
Từ đây suy ra diện tích hình thang bằng diện tích hình chữ nhật có một cạnh bằng đường trung bình của hình thang. Do đó diện tích hình thang bằng nửa tổng hai đáy nhân với chiều cao, ta có một cách nữa chứng minh công thức tính diện tích hình thang.

Dạng 2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH BÌNH HÀNH.

Phương pháp giải

Sử dụng công thức tính diện tích hình bình hành

Ví dụ 2 (Bài 28 SGK)



Xem hình 142 SGK (IG//FU).

Hãy đọc tên một số hình có cùng diện tích với hình $FIGE$.

Giải.

Đặt $FE = ER = RU = a$. Gọi khoảng cách giữa hai đường thẳng song song IG và FU bằng b . Ta có:

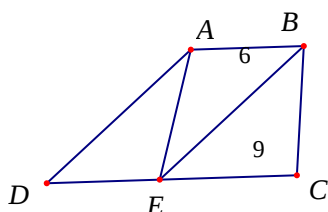
$$S_{FIGE} = S_{IGRE} = S_{IGUR} \text{ (cùng bằng } ah);$$

$$S_{FIR} = S_{GEU} \text{ (cùng bằng } ah).$$

Vậy các hình $IGRE, IGUR, IER, GEU$ có cùng diện tích với hình bình hành $FIGE$.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$) có $AB = 6$ cm, chiều cao bằng 9 cm. Đường thẳng đi qua B và song song với AD cắt CD tại E chia hình thang thành hình bình hành $ABED$ và tam giác BEC có diện tích bằng nhau. Tính diện tích hình thang.

Giải.



$$S_{ABED} = 6.9 = 54(\text{cm}^2).$$

$$S_{BEC} = S_{ABED} = 54(\text{cm}^2).$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = 54 + 54 = 108(\text{cm}^2)$$

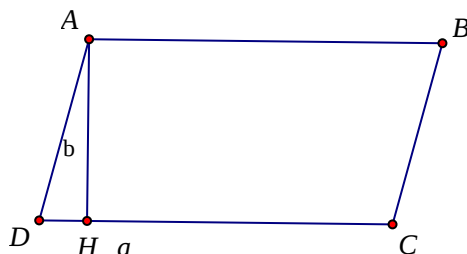
Dạng 3. TÌM DIỆN TÍCH LỚN NHẤT (NHỎ NHẤT) CỦA MỘT HÌNH

Phương pháp giải.

Nếu diện tích của một hình thoi luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số m , và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng m thì m là diện tích lớn nhất của hình đó.

Ví dụ 4. Tính diện tích lớn nhất của hình bình hành có độ dài hai cạnh kề nhau bằng $a.b$

Giải.



Xem hình bên ta có:

$$S_{ABCD} = DC.AH \leq DC.AD = ab$$

$\max S = ab \Leftrightarrow AH = AD$ tức là $ABCD$ là hình chữ nhật.

C.LUYỆN TẬP

- (Dạng 1). Tính diện tích hình thang $ABCD$ biết $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 1\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$.
- (Dạng 1) Tính diện tích hình thang $ABCD$ biết $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $CD = 6\text{cm}$.
- (Dạng 1) Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ đường cao AH . Biết $AH = 8\text{cm}$, $HC = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.
- (Dạng 1) Tính diện tích hình thang cân có các đáy bằng 10cm và 20cm , cạnh bên bằng 13cm .
- (Dạng 1). Chứng minh rằng mọi đường thẳng qua trung điểm của đường trung bình và cắt hai đáy hình thang sẽ chia hình thang thành hai hình thang có diện tích bằng nhau.
- (Dạng 1) Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $\hat{C} = 30^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$.
- (Dạng 1). Tính diện tích hình thang vuông có các cạnh đáy bằng a và b , cạnh bên không vuông góc với đáy bằng $a + b$.
- (Dạng 1). Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 48\text{cm}$, E là trung điểm của CD . Điểm F thuộc cạnh AB . Tính độ dài BF biết rằng diện tích hình thang $BFEC$ bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình chữ nhật.
- (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 720cm^2 , O là giao điểm hai đường chéo. Khoảng cách từ O đến CD bằng 9cm , khoảng cách từ O đến AB bằng 18cm . Tính độ dài AD , CD .
- (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 30cm^2 , M là điểm nằm trong hình bình hành. Tính tổng diện tích các tam giác MAB và MCD .

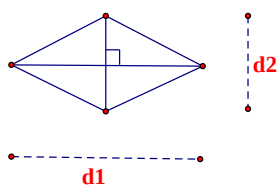
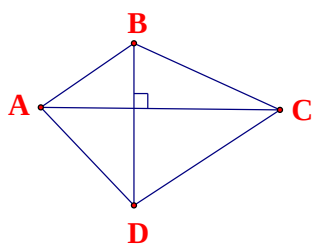
11. (Dạng 2). Tính diện tích hình bình hành biết biết hai cạnh kề bằng 6 cm và 10 cm, góc xen giữa bằng 150° .
12. (Dạng 2). Tính các góc của hình bình hành $ABCD$ có diện tích 30 cm^2 , $AB = 10\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$, $\hat{A} > \hat{B}$.
13. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 80 m^2 . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC . Các đường thẳng BE, AF cắt nhau ở O và cắt đường thẳng DC theo thứ tự ở M, N . Tính diện tích tam giác OMN .
14. (Dạng 2) Một hình bình hành có hai cạnh bằng 12 cm và 18 cm, một đường cao bằng 10 cm. Tính đường cao thứ hai.
15. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, I, K thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi giao điểm của AI với KB, DN theo thứ tự là F, G . Chứng minh rằng:
- $AE = EG = GC$.
 - $S_{EFGH} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$
16. (Dạng 1 và 2) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), E là trung điểm của AD . Đường thẳng qua E và song song với BC cắt AB và CD ở I và K . Chứng minh rằng diện tích hình thang $ABCD$ bằng diện tích hình bình hành $BIKC$.
17. (Dạng 3) Hình thang $ABCD$ có $AD = 4\text{ cm}$, $BC = 6\text{ cm}$, đường trung bình bằng 5 cm. Tính diện tích lớn nhất của hình thang.

§5. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$



Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH TỨ GIÁC CÓ HAI ĐƯỜNG CHÉO VUÔNG GÓC

Phương pháp giải.

Sử dụng công thức $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$ với $AB \perp CD$

Ví dụ 1. (Bài 32b SGK)

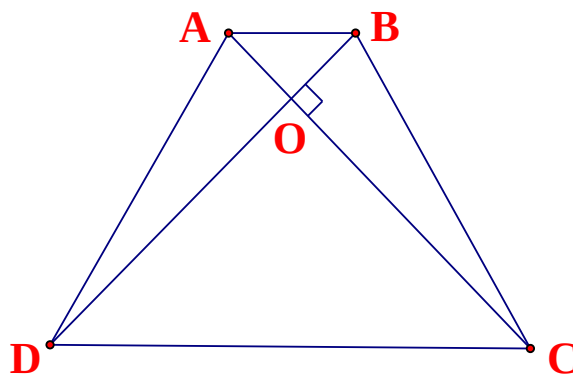
Hãy tính diện tích hình vuông có độ dài đường chéo là d .

Giải.

Hình vuông có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau. Do đó diện tích hình vuông bằng nửa tích hai đường chéo, tức là bằng $\frac{d^2}{2}$.

Ví dụ 2: Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có AC vuông góc với BD . Tính diện tích hình thang biết chiều cao bằng h .

Giải.



Ta có $\triangle ACD = \triangle BDC$ (ccc)

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}.$$

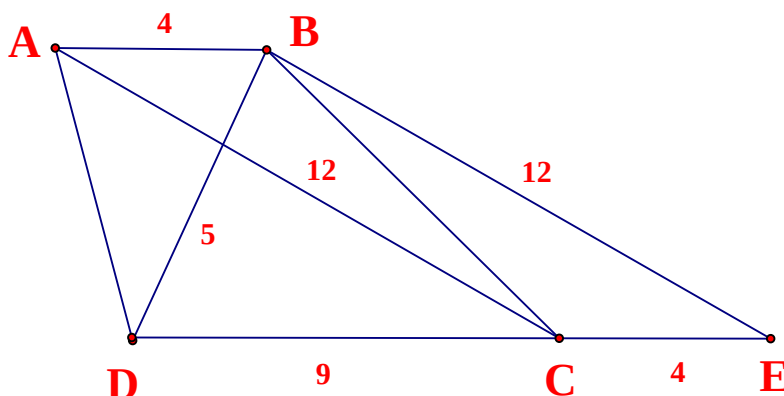
Tam giác vuông OCD có hai góc ở đáy bằng nhau nên $\widehat{BDC} = 45^\circ$. Do đó $\triangle BHD$ vuông cân. Ta có $HD = HB = h$ nên $BD^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2}.2h^2 = h^2.$$

Ví dụ 3: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 4$ cm, $CD = 9$ cm, $BD = 5$ cm, $AC = 12$ cm

- a) Qua B vẽ đường thẳng song song với AC cắt DC ở E . Tính $\widehat{DBE}$.
b) Tính diện tích hình thang.

Giải.



- a) $ABEC$ là hình bình hành nên $BE = AC = 12$ cm, $CE = AB = 4$ cm.

Xét $\triangle BDE$ có $BD^2 + BE^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = DE^2$

Nên $\triangle BDE$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{DBE} = 90^\circ$

- b) $BE \perp BD$ mà $BE \parallel AC$ nên $BD \perp AC$. Do đó :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30 (\text{cm}^2).$$

Dạng 2. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH THOI.

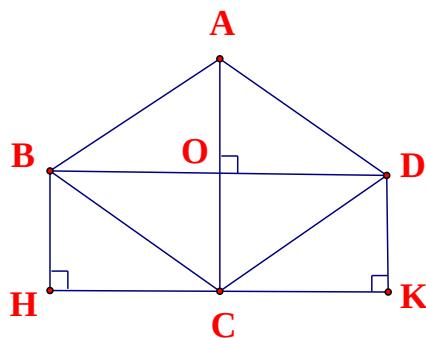
Phương pháp giải.

Tính diện tích hình thoi theo công thức diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc hoặc công thức diện tích hình bình hành.

Ví dụ 4: (Bài 33 SGK)

Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng đường chéo của một hình thoi cho trước và có diện tích bằng diện tích của hình thoi đó. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

Giải:



Vẽ hình chữ nhật $BDKH$ có KH đi qua C . Diện tích hình chữ nhật bằng diện tích hình thoi vì cùng gấp đôi S_{BCD} . Từ đó suy ra :

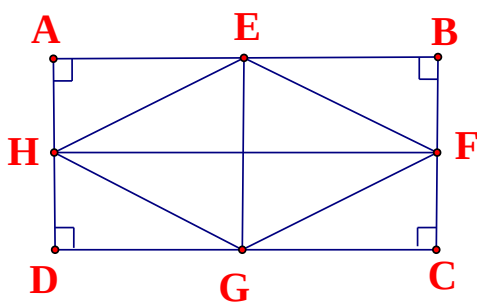
$$S_{ABCD} = S_{BDKH} = BD \cdot OC = \frac{1}{2} BD \cdot AC .$$

Điều này cho thấy diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

Ví dụ 5: (Bài 34 SGK)

Cho một hình chữ nhật. Vẽ tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật. Vì sao tứ giác này là một hình thoi? So sánh diện tích hình thoi và diện tích hình chữ nhật, từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

Giải.



Gọi E, F, G, H là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật $ABCD$. Ta có $\triangle AEH = \triangle BEF = \triangle CGF = \triangle DGH$ (c.c.c) $\Rightarrow EH = EF = FG = GH$,

Suy ra $EFGH$ là hình thoi.

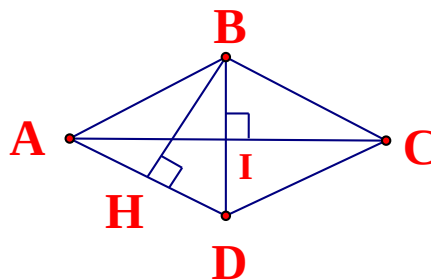
$$S_{EFGH} = S_{ABFH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{1}{2} AG \cdot HF .$$

Điều này cho thấy diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo,

Ví dụ 6. (Bài 35 SGK)

Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh $AB = 6\text{ cm}$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính diện tích hình thoi.

Giải.



Cách 1. Từ B vẽ $BH \perp AD$ thì :

$$AH = HD = \frac{AD}{2} = 3\text{ cm} .$$

Ta có $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ nên $BH = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

Cách 2. Tam giác ABD là tam giác đều nên $BD = 6\text{ cm}$, AI là đường cao của tam giác đều nên ta cũng tính như trên được $AI = 3\sqrt{3}\text{ cm}$. $S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

Dạng 3. TÌM DIỆN TÍCH LỚN NHẤT(NHỎ NHẤT) CỦA MỘT HÌNH.

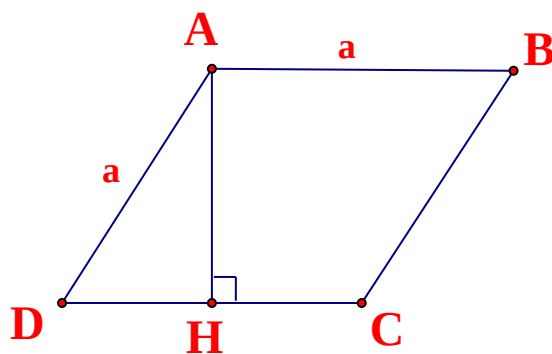
Phương pháp giải.

Nếu diện tích của một hình luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số m , và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng m thì m là diện tích lớn nhất của hình đó.

Ví dụ 7. (Bài 36 SGK)

Cho một hình thoi và một hình vuông có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

Giải.



Xét hình thoi $ABCD$ và hình vuông $MNPQ$ có cùng chu vi, cạnh của chúng bằng nhau. Gọi cạnh của chúng bằng a .

Ta có: $S_{MNPQ} = a^2$ (1)

Ta sẽ chứng minh $S_{ABCD} \leq a^2$.

Kẻ $AH \perp CD$, ta có $AH \leq AD = a$.

$$S_{ABCD} = CD \cdot AH \leq CD \cdot AD = a \cdot a = a^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} \leq S_{MNPQ}$. Vậy diện tích hình vuông lớn hơn diện tích hình thoi (nếu hình thoi đó không phải là hình vuông).

C. LUYỆN TẬP.

1. (Dạng 1). Hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, đường trung bình bằng d . Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình thang cân đó.
2. (Dạng 1). Hình vuông $ABCD$ có đường chéo bằng 4 cm. Trên đường chéo AC lấy điểm M sao cho $AM = 1$ cm. Qua M kẻ các đường thẳng vuông góc với các cạnh của hình vuông, chúng cắt AB và CD ở E và F , cắt AD và BC ở G và H . Tính diện tích hai hình vuông nhỏ.
3. (Dạng 1). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 12$ cm, $AB = 18$ cm. Các đường phân giác các góc của hình chữ nhật cắt nhau tạo thành tứ giác $EFGH$.

- a) Chứng minh $EFGH$ là hình vuông.
- b) Tính diện tích hình vuông $EFGH$.
4. (Dạng 2). Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng 2 cm và một trong các góc của nó bằng 30° .
5. (Dạng 2). Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng a , góc tù bằng 150° .
6. (Dạng 2). Cho hình thoi $ABCD$. Gọi H, K là chân các đường vuông góc kẻ từ A đến CD, BC . Chứng minh rằng $AH = AK$.
7. (Dạng 2). Hình thoi $ABCD$ có $AC = 10$ cm, $AB = 13$ cm. Tính diện tích hình thoi.
8. (Dạng 2). Tính diện tích hình thoi có cạnh 17 cm, tổng hai đường chéo bằng 46 cm.
9. (Dạng 2). Tính cạnh của hình thoi có diện tích bằng 24 cm^2 , tổng hai đường chéo bằng 14 cm.
10. (Dạng 2). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $AD = 6$ cm. Hình thoi $EFGH$ có E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $AE = AH = CF = CG$. Tính độ dài AE .
11. (Dạng 3). Trong các hình thoi có tổng hai đường chéo bằng 12 cm, hình nào có diện tích lớn nhất?

§6. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để tính diện tích đa giác, ta thường chia đa giác đó thành các tam giác, các tứ giác tính được diện tích rồi tính tổng các diện tích đó: hoặc tạo ra một tam giác nào đó có chứa đa giác ấy rồi tính hiệu các diện tích.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC.

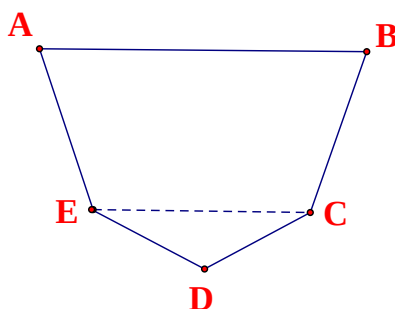
Phương pháp giải.

Đưa về tính tổng các diện tích hoặc hiệu các diện tích.

Ví dụ 1. (Bài 39 SGK)

Thực hiện các phép vẽ và đo cần thiết để tính diện tích một đám đất có dạng như hình 154 SGK, trong đó $AB \parallel CE$ và được vẽ với tỉ lệ $1/5000$.

Hướng dẫn.



Hình 154 SGK

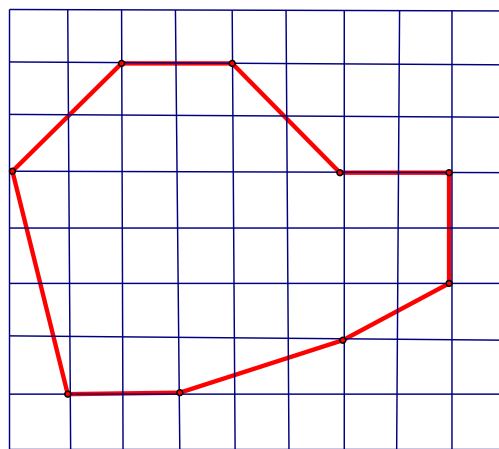
Chia đầm đất $ABCDF$ thành hình thang $ABCE$ và hình tam giác ECD . Cần vẽ đường cao CH của hình thang và đường cao DK của hình tam giác. Cần đo AB, CE, CH, DK .

Tính S_{ABCE} và S_{ECD} , lấy tổng hai diện tích trên rồi nhân với 5000 (vì bản đồ được vẽ với tỉ xích 1/5000).

Ví dụ 2: (Bài 40 SGK)

Tính diện tích thực của bể bơi có sơ đồ là phần gạch sọc trên hình 155 SGK (mỗi ô vuông là 1 cm^2 , tỉ lệ 1/10000).

Giải.



Diện tích gạch sọc gồm:

$$6.8 - 14.5 = 33.5 (\text{ô vuông})$$

Diện tích thực tế là:

$$33.5 \times 10000^2 = 3350000000 (\text{cm}^2) = 335000 (\text{m}^2).$$

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích 60 cm^2 . Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CD . Gọi I là giao điểm của BF và DE . Tính diện tích tứ giác $ABID$.

Giải.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 60 : 2 = 30 (\text{m}^2)$$

$$S_{BCD} = 30 \text{m}^2.$$

Ta có $BI = \frac{2}{3} BF$ nên:

$$S_{BDI} = \frac{2}{3} S_{BDF} = \frac{1}{3} S_{BDC} = 30 : 3 = 10 (\text{m}^2).$$

$$S_{ABID} = S_{ABD} + S_{BDI} = 30 + 10 = 40 (\text{m}^2).$$

Dạng 2. DỰNG TAM GIÁC CÓ DIỆN TÍCH BẰNG DIỆN TÍCH CỦA MỘT ĐA GIÁC

Phương pháp giải

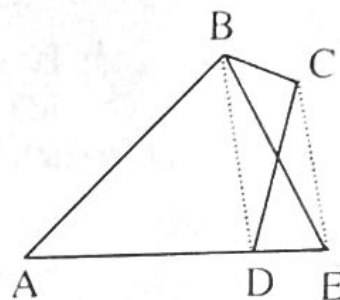
Thường kẻ đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước để tạo ra một tam giác mới có diện tích bằng diện tích một tam giác cho trước.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy dựng tam giác ABE có diện tích bằng diện tích tứ giác $ABCD$

Giải

Qua C kẻ đường thẳng song song với BD , cắt AD ở E . Do $BD \parallel CE$ nên $S_{BCD} = S_{BED}$ (chung đáy BD , các đường cao tương ứng kẻ từ C và từ E đến BD bằng nhau). Ta có :

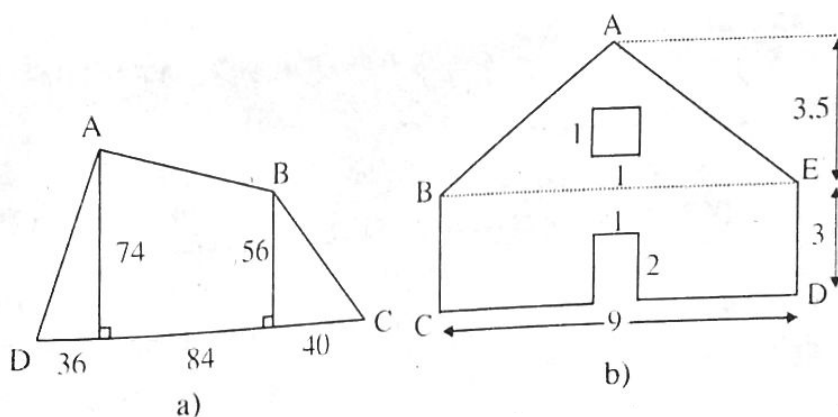
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = S_{ABD} + S_{BED} = S_{ABE}$$



C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1).

- Tính diện tích tứ giác $ABCD$ có các kích thước bằng milimét trên hình a
- Tính diện tích tường nhà trên hình b) với các kích thước bằng mét (trừ một ô thoáng hình vuông và một cửa đi hình chữ nhật).



- (Dạng 1). Cho tam giác ABC có diện tích $60m^2$. Điểm D thuộc cạnh AB sao cho $AD = \frac{1}{3} AB$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AE = \frac{1}{4} AC$. Tính diện tích tứ giác $BDEC$
- (Dạng 1). Cho tứ giác $ABCD$ diện tích S . Điểm M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng $S_{ABMD} = \frac{1}{2}S$

4. (Dạng 1). Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích S . Điểm E là trung điểm của AB , I là giao điểm của DE và AC . Tính diện tích tứ giác $BEIC$.

5. (Dạng 1). Tính diện tích lục giác đều cạnh a .

6. (Dạng 1). Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích $10cm^2$. Gọi E là điểm đối với A qua D . F là điểm đối xứng với B qua A , G là điểm đối xứng với C qua B . H là điểm đối xứng với D qua C . Tính diện tích tứ giác $EFGH$

7. (Dạng 1). Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Biết diện tích các tam giác AOB , BOC , COD theo thứ tự bằng $2, 5, 10 cm^2$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

8. (Dạng 1). Tứ giác $ABCD$ có E là trung điểm của AB , F là trung điểm của CD . Cho biết EF chia tứ giác $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

9. (Dạng 1). Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích $60m^2$. Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho $AE = EF = FB$. Trên cạnh CD lấy các điểm G, H sao cho $CG = GH = HD$.

a) Tính tổng diện tích các tam giác ADH và CBE .

b) Tính diện tích tứ giác $EFGH$

10. (Dạng 1). Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AB , F là trung điểm của CD , I là giao điểm của AF và DE , J là trung điểm của CD , K là giao điểm của AF và DE . Chứng minh rằng

a) $S_{ECD} = S_{AFD} + S_{BCF}$

b) $S_{EIK} = S_{AID} + S_{BKC}$

11. (Dạng 2). Cho tứ giác $ABCD$. Hãy kẻ đường thẳng đi qua A và chia tam giác $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

12. (Dạng 2). Cho tam giác ABC , điểm D thuộc cạnh AC ($AD < DC$). Hãy kẻ đường thẳng đi qua D và chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.