

Bài 1: LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG**Bài 2: LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN****A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. Với ba số a, b, c ta có:**

- + Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$;
- + Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$;
- + Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$;
- + Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$;
- + Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức thì được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

2. Với ba số a, b và c mà $c > 0$, ta có:

- + Nếu $a < b$ thì $ac < bc$, nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;
- + Nếu $a > b$ thì $ac > bc$, nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

3. Với ba số a, b và c mà $c < 0$, ta có:

- + Nếu $a < b$ thì $ac > bc$, nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$;
- + Nếu $a > b$ thì $ac < bc$, nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.
- + Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương thì được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.
- + Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm thì được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

B. CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1: BIỂU THỊ THỨ TỰ CÁC SỐ.****Phương pháp giải**

- + $a < b$: Đọc là a nhỏ hơn b .
- + $a \leq b$: Đọc là a nhỏ hơn hoặc bằng b .
- + Chú ý đến quy tắc cộng và nhân cả hai vế bất đẳng thức cho cùng một số.

Ví dụ 1. (Bài 1, trang 37 SGK)

Bất đẳng thức nào biểu thị đúng thứ tự các số ? Vì sao?

- a) $(-2) + 3 \geq 2$;
- b) $-6 \leq 2 \cdot (-3)$;
- c) $4 + (-8) < 15 + (-8)$;
- d) $x^2 + 1 \geq 1$.

Giải

- a) $(-2) + 3 \geq 2$ sai vì $1 \geq 2$ là bất đẳng thức sai.
- b) $-6 \leq 2 \cdot (-3)$ đúng vì $-6 = -6$.
- c) $4 + (-8) < 15 + (-8)$ đúng vì từ $4 < 15$ cộng vào hai vế bất đẳng thức cho -8 .
- d) $x^2 + 1 \geq 1$ đúng vì $x^2 \geq 0$ đúng với x .

b) Theo a) $(-2).3 < -4,5$ và $10 > 5$ nên:

$$(-2).3.10 < -4,5.10 \Rightarrow (-2).30 < -45$$

Mặt khác: $(-2).3 < -4,5 \Rightarrow (-2).3 + 4,5 < -4,5 + 4,5$

$$\Rightarrow (-2).3 + 4,5 < 0.$$

Dạng 2. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ

Phương pháp giải.

Sử dụng quy tắc cộng và nhân cả hai vế bất đẳng thức cho cùng một số.

Ví dụ 7. (Bài 2, trang 37 SGK)

Giả sử $a < b$, hãy so sánh:

a) $a+1$ và $b+1$

b) $a-2$ và $b-2$

Giải

a) Ta có $a < b$ suy ra $a+1 < b+1$.

b) Ta có $a < b$ suy ra $a-2 < b-2$

Ví dụ 8. (Bài 3, trang 37 SGK)

So sánh a và b nếu:

a) $a-5 \geq b-5$

b) $15+a \leq 15+b$

Giải

a) Từ $a-5 \geq b-5$ suy ra $(a-5)+5 \geq (b-5)+5 \Rightarrow a \geq b$.

b) Từ $15+a \leq 15+b \Rightarrow (15+a)+(-15) \leq (15+b)+(-15) \Rightarrow a \leq b$

Ví dụ 9. (Bài 6, trang 39 SGK)

Giả sử có $a < b$, hãy so sánh: $2a$ và $2b$; $-a$ và $-b$.

Giải

- Ta có $a < b$ và $2 > 0$ nên $2a < 2b$.

- Ta có $a < b$ và $-1 < 0$ nên $(-1).a > (-1).b \Rightarrow -a > -b$.

Ví dụ 10. (Bài 13, trang 40 SGK)

So sánh a và b nếu:

a) $a+5 < b+5$

b) $-3a > -3b$

c) $5a-6 \geq 5b-6$

d) $-2a+3 \leq -2b+3$

Giải

a) $a+5 < b+5 \Rightarrow (a+5)+(-5) < (b+5)+(-5) \Rightarrow a < b$.

b) $-3a > -3b$ và $-\frac{1}{3} < 0$ nên $(-3a).(-\frac{1}{3}) < (-3b).(-\frac{1}{3}) \Rightarrow a < b$.

c) $5a-6 \geq 5b-6 \Rightarrow (5a-6)+6 \geq (5b-6)+6 \Rightarrow 5a \geq 5b$

$$\Rightarrow (5a).\frac{1}{5} \geq (5b).\frac{1}{5} \Rightarrow a \geq b$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -2a+3 &\leq -2b+3 \Rightarrow (-2a+3)+(-3) \leq (-2b+3)+(-3) \\ &\Rightarrow -2a \leq -2b \Rightarrow (-2a) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \geq (-2b) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow a \geq b. \end{aligned}$$

Ví dụ 11. (Bài 14, trang 40 SGK)

Cho $a < b$, hãy so sánh: $2a+1$ với $2b+1$; $2a+1$ với $2b+3$

Giải

- $a < b \Rightarrow 2a < 2b \Rightarrow 2a+1 < 2b+1$.
- $2a+1 < 2b+1 < 2b+3 \Rightarrow 2a+1 < 2b+3$.

Ví dụ 12. Cho $a > b > 0$, hãy so sánh hai số:

$$x = \frac{1+a}{1+a+a^2} \text{ và } y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$$

Giải

Ta có $x > 0, y > 0$ và:

$$\frac{1}{x} = \frac{1+a+a^2}{1+a} = 1 + \frac{a^2}{1+a} = 1 + \frac{1}{\frac{1+a}{a^2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}}$$

$$\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b}}$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \text{ nên } \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y.$$

Dạng 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta thường sử dụng các phương pháp sau:

1. Lập hiệu $A - B$ và chứng minh hiệu đó không âm, tức là $A - B \geq 0$.

Lưu ý: $C^2 + D^2 + \dots + F^2 \geq 0$, vì $C^2 \geq 0, D^2 \geq 0, \dots, F^2 \geq 0$.

2. Phương pháp biến đổi tương đương: Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 13. (Bài 11, trang 40 SGK)

Cho $a < b$, chứng minh:

a) $3a+1 < 3b+1$

b) $-2a-5 > -2b-5$

Giải

a) $a < b \Rightarrow 3a < 3b \Rightarrow 3a+1 < 3b+1$

b) $a < b \Rightarrow -2a > -2b \Rightarrow -2a-5 > -2b-5$

Ví dụ 14. (Bài 12, trang 40 SGK)

Chứng minh:

a) $4.(-2)+14 < 4.(-1)+14$

b) $(-3).2+5 < (-3).(-5)+5$

Giải

a) Ta có: $-2 < -1 \Rightarrow 4.(-2) < 4.(-1) \Rightarrow 4.(-2)+14 < 4.(-1)+14$

b) Ta có: $2 > -5 \Rightarrow (-3).2 < (-3).(-5) \Rightarrow (-3).2+5 < (-3).(-5)+5$

Ví dụ 15. a) Cho $a > 0$, Chứng minh rằng: $a + \frac{1}{a} \geq 2$

b) Cho a, b tùy ý, chứng minh rằng: $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$

Giải

a) Lập hiệu : $a + \frac{1}{a} - 2$. Ta có:

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$$

Vì $(a-1)^2 \geq 0$ và $a > 0$ nên $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$. Do đó: $a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0$, suy ra $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

b) $\frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{a^2+b^2-2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Ví dụ 16. Với mọi x, y, z chứng minh rằng:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Giải

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx =$

$$= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right] \geq 0$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0, (y-z)^2 \geq 0, (z-x)^2 \geq 0$

Do đó: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

b) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) =$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$$

Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

c) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) =$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1)$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (z-1)^2 \geq 0$

Do đó $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Dạng 4. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LÀM TRỌI ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp giải.

Phương pháp này thường được sử dụng để chứng minh bất đẳng thức có một vế là tổng hoặc tích hữu hạn. Áp dụng tính chất của thứ tự để biến đổi tổng hoặc tích hữu hạn về một tổng hoặc tích khác mà việc tính toán đơn giản hơn.

Ví dụ 17. Cho n là số nguyên lớn hơn 1, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$

Giải

a) Ta có: $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$ (vì $n+1 < 2n$)

Tương tự: $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}; \frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}; \dots; \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$

Do đó: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Vậy: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

b) Với $k = 2, 3, \dots, n$ ta có:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1) \cdot k} \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (1)$$

Lần lượt cho $k = 2, 3, \dots, n$ trong (1) rồi cộng lại ta được:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Hay: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Dạng 5. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT.

Phương pháp giải.

- Giả sử $f(x) \leq k$ (k là hằng số) và dấu bằng xảy ra khi $x = a$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là k khi $x = a$, kí hiệu $\max f(x) = k$ khi $x = a$.
- Giả sử $f(x) \geq k$ (k là hằng số) và dấu bằng xảy ra khi $x = a$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là k khi $x = a$, kí hiệu $\min f(x) = k$ khi $x = a$.
-

Ví dụ 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

b) $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

Giải

a) $A = [(x-1)(x+6)][(x+2)(x+3)] = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$
 $= (x^2 + 5x)^2 - 36.$

Vì $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ với mọi x nên $A \geq -36$. Vậy $\min A = -36$ khi $x^2 + 5x = 0$ hay $x = 0$ hoặc $x = -5$.

b) Áp dụng tính chất giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a+b|$ và dấu bằng xảy ra khi $ab \geq 0$.

Ta có: $|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq |x-1+3-x| = 2$

dấu bằng xảy ra khi $(x-1)(3-x) \geq 0$ hay $1 \leq x \leq 3$. Mặt khác $|x-2| \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Vậy $B = |x-1| + |x-3| + |x-2| \geq 2 + 0 = 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$, do đó $\min B = 2$ khi $x = 2$.

Ví dụ 19. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $C = x^6 + y^6$ biết $x^2 + y^2 = 1$

b) $D = \frac{2x+1}{x^2+2}$

Giải

a) Ta có: $C = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên $C = x^4 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2$
 $= 1 - 3x^2y^2 \leq 1$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hay $y = 0$.

Vậy $\max C = 1$ khi $x = 0, y = \pm 1$ hoặc $y = 0, x = \pm 1$.

b) Ta có: $D = \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} = 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Vậy $\max D = 1$ khi $x = 1$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Bất đẳng thức nào biểu thị đúng thứ tự các số ? Vì sao ?

a) $-7 \leq -6 - 1$

b) $5(-3) > -16$

c) $12 < (-3) \cdot 5$

d) $4(-2) > (-7)(-2)$

2. (Dạng 2).

a) So sánh $a - 1$ và a ; $-2b$ và $-2b + 1$.

b) Cho $a < b$ so sánh $2a$ và $2b + 1$; $-3a$ và $-3b - 1$.

3. (Dạng 2)

a) Cho $a \neq 0$, hãy so sánh a^2 và 0 ; $-a^2$ và 0 .

b) So sánh $a^2 + 1$ và 0 ; $-a^2 - 3$ và 0 .

4. (Dạng 2). Cho $0 < a < b$, hãy so sánh:

a) a^2 và ab ; b^2 và ab

b) a^2 và b^2 ; a^3 và b^3 .

5. (Dạng 3). Cho $a > b > 0$, chứng minh $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

6. (Dạng 3).

a) Cho $a < b$ và $c < d$, chứng minh $a + c < b + d$.

b) a, b, c, d dương và $a < b, c < d$. Chứng minh $ac < bd$.

7. (Dạng 3). Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

c) $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^2$.

8. (Dạng 2). Cho a, b cùng dấu, hãy so sánh hai số $(1 + a)(1 + b)$ và $1 + a + b$.

9. (Dạng 4). Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$ (với $n > 1$)

c) $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

10. (Dạng 5). Chứng minh rằng nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng: Tìm giá trị lớn nhất của $A = (1-x)(2-x)$ với $\frac{1}{2} < x < 1$

11. (Dạng 5). Chứng minh rằng : Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Áp dụng: Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $B = \frac{(x+1)^2}{x}$ (với $x > 0$)

b) $C = x + \frac{1}{x-1}$ (với $x > 1$)

12. (Dạng 5). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $D = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

BÀI 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

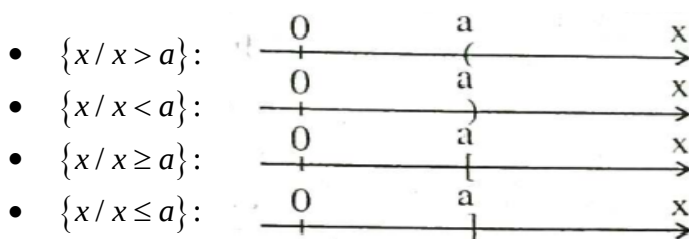
1. Nghiệm của bất phương trình:

$x = a$ gọi là nghiệm của bất phương trình nếu ta thay $x = a$ vào hai vế bất phương trình thì được một bất đẳng thức đúng.

2. Tập nghiệm của bất phương trình:

Tập nghiệm của bất phương trình là tất cả các giá trị của biến x thỏa mãn bất phương trình.

3. Biểu diễn tập nghiệm:



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. KIỂM TRA $x = a$ CÓ LÀ NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG

Phương pháp giải

Bằng cách thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình, nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là nghiệm của bất phương trình, còn nếu bất đẳng thức sai thì $x = a$ không là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 1. (Bài 15, trang 43 SGK)

Kiểm tra xem giá trị $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:

a) $2x+3 < 9$;

b) $-4x > 2x+5$;

c) $5-x > 3x-12$.

Giải

a) Thay $x = 3$ vào hai vế (vế trái : VT ; vế phải : VP) của bất phương trình ta có $VT = 2.3 + 3 = 9$; $VP = 9$. Vậy $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình.

b) Với $x = 3$, ta có: $VT = -4.3 = -12$; $VP = 2.3 + 5 = 11$. Vì $-12 < 11$ nên $x = 3$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Với $x = 3$, ta có: $VT = 5 - 3 = 2$; $VP = 3.3 - 12 = -3$. Vì $2 > -3$ nên $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Dạng 2. BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

• $\{x / x > a\}$:	
• $\{x / x < a\}$:	
• $\{x / x \geq a\}$:	
• $\{x / x \leq a\}$:	

Ví dụ 2. (Bài 16, trang 43 SGK)

Viết kí hiệu và biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình sau trên trục số:

- a) $x < 4$; b) $x \leq -2$; c) $x > -3$; d) $x \geq 1$.

Giải

a) $\{x / x < 4\}$:

b) $\{x / x \leq -2\}$:

c) $\{x / x > -3\}$:

d) $\{x / x \geq 1\}$:

Ví dụ 3. (Bài 17, trang 43 SGK)

Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?

a)

b)

c)

d)

Giải

- a) $x \leq 6$; b) $x > 2$; c) $x \geq 5$; d) $x < -1$.

Dạng 3. LẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Dựa vào các dữ kiện đã cho trong bài toán để chọn ẩn số x rồi dựa vào mối quan hệ giữa giả thiết của bài toán với kết luận cần tìm để lập bất phương trình tìm x .

Ví dụ 4. (Bài 18 trang 43 SGK)

Hãy lập bất phương trình cho bài toán sau :

Quãng đường từ A đến B dài 50km . Một ô tô đi từ A đến B , khởi hành lúc 7 giờ. Hỏi ô tô phải đi vận tốc là bao nhiêu km / h để đến B trước 9 giờ?

Giải

Gọi x (km / h) là vận tốc của ô tô ($x > 0$).

Thời gian ô tô từ A đến B là $\frac{50}{x}(h)$.

Vì phải đến B trước 9 giờ nên thời gian ô tô đi từ A đến B phải nhỏ hơn 2 giờ. Ta có bất phương trình $\frac{50}{x} < 2$

Dạng 4. CHỨNG MINH BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM VỚI MỌI GIÁ TRỊ CỦA ẨN SỐ x

Phương pháp giải

Biến đổi bất phương trình về dạng $[f(x)]^2 + k > 0$ (với $k > 0$)

Ví dụ 5. Chứng minh các bất phương trình sau có nghiệm với mọi x :

a) $x^2 - 4x + 5 > 0$; b) $-x^2 + 2x - 2 < 0$

Giải

a) Ta có : $x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1$. Vì $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi giá trị x nên $(x - 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x .

Vậy $x^2 - 4x + 5 > 0$ có nghiệm với mọi giá trị của x .

b) Ta có : b) $-x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 1) - 1 = -(x - 1)^2 - 1$. Vì $-(x - 1)^2 \leq 0$ với mọi giá trị x nên $-(x - 1)^2 - 1 < 0$ với mọi x .

Vậy $-x^2 + 2x - 2 < 0$ có nghiệm với mọi giá trị của x .

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1) . Thử xem $x = -1$ có là nghiệm của bất phương trình sau không?

a) $3x - 7 > 2x + 1$; b) $-3x - 1 > x + 1$;
c) $1 - 3x < 2 - 5x$; d) $5(x - 2) > 3x - 1$.

2. (Dạng 2). Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình của bất phương trình sau trên trục số.

a) $x > 7$; b) $x \geq -2$;

- c) $x < 0$; d) $x \leq -3$;
3. (Dạng 1). Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / -10 \leq x \leq 10\}$. Tìm là $x \in A$ nghiệm của bất phương trình.
- a) $|x| < 4$; b) $|x| > 7$;
- c) $|x| \leq 2$; d) $|x| \geq 9$.
4. (Dạng 3). Viết bất phương trình và chỉ ra hai nghiệm của nó từ các mệnh đề.
- a) Tổng hai lần số nào đó và số 3 thì lớn hơn 18.
- b) Hiệu của 5 và 3 lần số nào đó nhỏ hơn hoặc bằng 10.
5. (Dạng 4). Chứng minh các bất phương trình sau có nghiệm với mọi x :
- a) $x^2 + x + 1 > 0$; b) $-x^2 + 3x - 3 < 0$.
6. (Dạng 4). Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm:
- a) $(x-1)(x-5) + 10 < 0$; b) $x^2 + 2x < 2x$.

BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất phương trình tương đương:

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

2. Quy tắc chuyển vế:

Khi chuyển hạng tử này sang vế kia của bất phương trình ta phải đổi dấu hạng tử đó.

3. Quy tắc nhân:

Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác số 0, ta phải:

- Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương.
- Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. KIỂM TRA $x = a$ CÓ LÀ NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG

Phương pháp giải

Thay $x = a$ vào hai vế của bất phương trình:

- Nếu được bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là nghiệm.
- Nếu không được bất đẳng thức đúng thì $x = a$ không là nghiệm.

Ví dụ 1. (Bài 27, trang 48 SGK)

Kiểm tra xem giá trị $x = -2$ có là nghiệm của bất phương trình sau không?

a) $x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6$;

b) $(-0,001)x > 0,003$.

Giải

a) với $x = -2$: VT $= -2 + 2(-2)^2 - 3(-2)^3 + 4(-2)^4 - 5 = 89$;

VP $= 2(-2)^2 - 3(-2)^3 + 4(-2)^4 - 6 = 90$.

Vì $89 < 90$ nên $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Với $x = -2$: $VT = (-0,001)(-2) = 0,002$.

Vì $0,002 < 0,003$ nên $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình.

Chú ý. Ta có thể tìm tập nghiệm của mỗi bất phương trình rồi xem $x = -2$ có thuộc tập nghiệm hay không?

Chẳng hạn : $(-0,001)x > 0,003 \Leftrightarrow x < 0,003 : (-0,001) \Leftrightarrow x < -3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{x / x < -3\}$.

Vì $x = -2 \notin S$ nên $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 2. (Bài 28, trang 48 SGK)

Cho bất phương trình $x^2 > 0$.

a) Chứng tỏ $x = 2, x = -3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Có phải mọi giá trị của ẩn x đều là nghiệm của bất phương trình đã cho hay không?

Giải

a) Với $x = 2$ vế trái bằng $2^2 = 4 > 0$.

Với $x = -3$ vế trái bằng $(-3)^2 = 9 > 0$.

Vậy $x = 2, x = -3$ là nghiệm của bất phương trình $x^2 > 0$.

b) Với $x = 0$ ta có vế trái bằng $0^2 = 0$ nên $x = 0$ không là nghiệm của bất phương trình $x^2 > 0$.

Dạng 2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Áp dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân
- Viết tập nghiệm của bất phương trình

Ví dụ 3. (Bài 19, trang 47 SGK)

Giải các bất phương trình sau (theo quy tắc chuyển vế):

a) $x - 5 > 3$;

b) $x - 2x < -2x + 4$;

c) $-3x > -4x + 2$;

d) $8x + 2 < 7x - 1$.

Giải

a) $x - 5 > 3 \Leftrightarrow x > 5 + 3 \Leftrightarrow x > 8$. Vậy $S = \{x / x > 8\}$.

b) $x - 2x < -2x + 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2x < 4 \Leftrightarrow x < 4$. Vậy b) $-4x < 12 \Rightarrow S = \{x / x < 4\}$.

c) $-3x > -4x + 2 \Leftrightarrow -3x + 4x > 2 \Leftrightarrow x > 2$. Vậy $S = \{x / x > 2\}$.

Ví dụ 4. (Bài 20, trang 47 SGK)

Giải các bất phương trình sau (theo quy tắc nhân):

$$a) 0,3x > 0,6;$$

$$b) -4x < 12;$$

$$c) -x > 4;$$

$$d) 1,5x > -9.$$

Giải

$$a) 0,3x > 0,6 \Leftrightarrow x > 0,6 : 0,3 \Leftrightarrow x > 2. \text{ Vậy } S = \{x / x > 2\}.$$

$$b) -4x < 12 \Leftrightarrow x > 12 : (-4) \Leftrightarrow x > -3 \text{ Vậy } S = \{x / x > -3\}.$$

$$c) -x > 4 \Leftrightarrow x < -4. \text{ Vậy } S = \{x / x < -4\}.$$

$$d) 1,5x > -9 \Leftrightarrow x > -9 : 1,6 \Leftrightarrow x > -6. \text{ Vậy } S = \{x / x > -6\}.$$

Ví dụ 5. (Bài 24, trang 47 SGK)

Giải các bất phương trình:

$$a) 2x - 1 > 5;$$

$$b) 3x - 2 < 4;$$

$$c) 2 - 5x \leq 17;$$

$$d) 3 - 4x \geq 19.$$

Giải

$$a) 2x - 1 > 5 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3. S = \{x / x > 3\}.$$

$$b) 3x - 2 < 4 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2. S = \{x / x < 2\}.$$

$$c) 2 - 5x \leq 17 \Leftrightarrow -5x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq -3. S = \{x / x \geq -3\}.$$

$$d) 3 - 4x \geq 19 \Leftrightarrow -4x \geq 16 \Leftrightarrow x \leq -4. S = \{x / x \leq -4\}.$$

Ví dụ 16. (Bài 25, trang 47 SGK)

Giải các bất phương trình:

$$a) \frac{2}{3}x > -6;$$

$$b) -\frac{5}{6}x < 20;$$

$$c) 3 - \frac{1}{4}x > 2;$$

$$d) 5 - \frac{1}{3}x > 2.$$

Giải

$$a) \frac{2}{3}x > -6 \Leftrightarrow x > -6 : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > -9. S = \{x / x > -9\}.$$

$$b) -\frac{5}{6}x < 20 \Leftrightarrow x > 20 : \left(-\frac{5}{6}\right) \Leftrightarrow x > -24. S = \{x / x > -24\}.$$

$$c) 3 - \frac{1}{4}x > 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x > -1 \Leftrightarrow x < 4. S = \{x / x < 4\}.$$

$$d) 5 - \frac{1}{3}x > 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x > -3 \Leftrightarrow x < 9. S = \{x / x < 9\}.$$

Ví dụ 7 (Bài 29, trang 48 SGK)

Tìm x sao cho:

a) Giá trị của biểu thức $2x - 5$ không âm.

b) Giá trị của biểu thức $-3x$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $-7x + 5$

Giải

$$\text{a) } 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } -3x \leq -7x + 5 \Leftrightarrow -3x + 7x \leq 5 \Leftrightarrow 4x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 8. (Bài 32, trang 48 SGK)

Giải các bất phương trình :

$$\text{a) } 8x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 6)$$

$$\text{b) } 2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$$

Giải

$$\text{a) } 8x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 6) \Leftrightarrow 8x + 3x + 3 > 5x - 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow 8x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{8}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ x / x > \frac{3}{8} \right\}$$

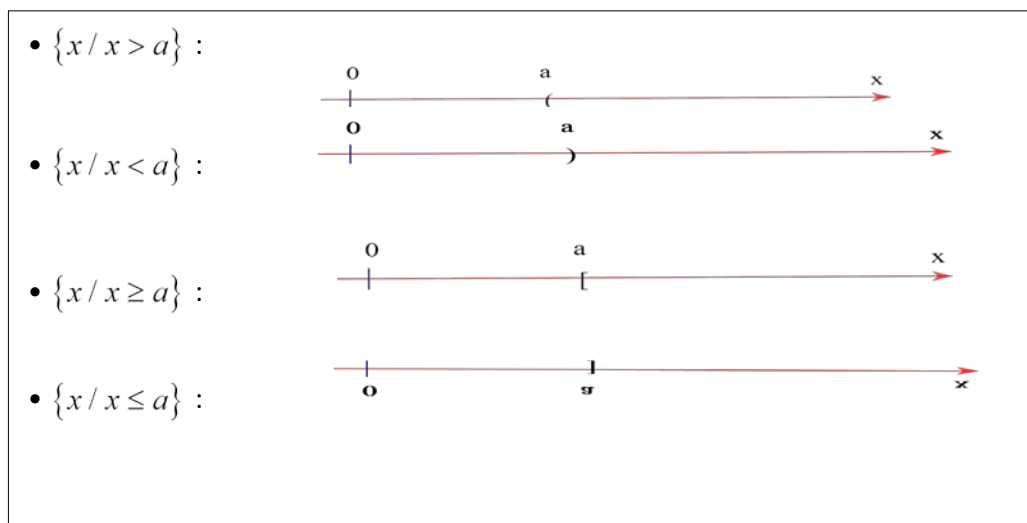
$$\text{b) } 2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3) \Leftrightarrow 12x^2 - 2x > 12x^2 + 9x - 8x - 6$$

$$\Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Vậy } S = \{ x / x < 2 \}.$$

Dạng 3. BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM TRÊN TRỤC SỐ

Phương pháp giải



Ví dụ 9. (Bài 22, trang 47 SGK)

Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

$$\text{a) } 1,2x < -6 ;$$

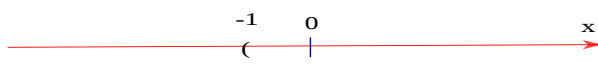
$$\text{b) } 3x + 4 > 2x + 3$$

Giải

$$\text{a) } 1,2x < -6 \Leftrightarrow x < (-6) : 1,2 \Leftrightarrow x < -5 .$$



b) $3x + 4 > 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x > -4 + 3 \Leftrightarrow x > -1$.

$S = \{x / x > -1\}$: 

Ví dụ 10. (Bài 23, trang 47 SGK)

Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $2x - 3 > 0$;

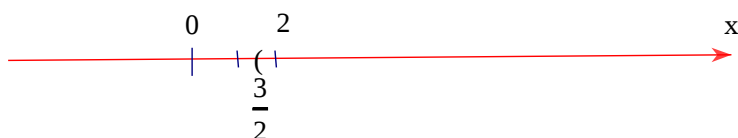
b) $2x + 4 < 0$

c) $4 - 3x \leq 0$;

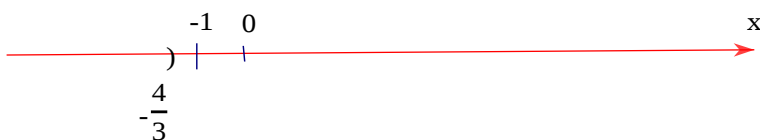
d) $5 - 2x \geq 0$.

Giải

a) $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Vậy $S = \left\{x / x > \frac{3}{2}\right\}$



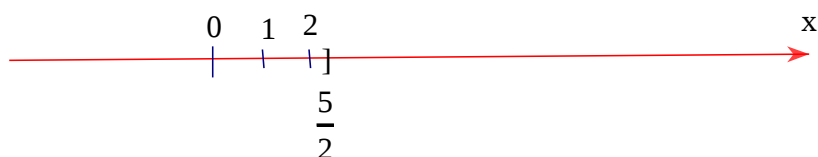
b) $3x + 4 < 0 \Leftrightarrow 3x < -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}$. Vậy $S = \left\{x / x < -\frac{4}{3}\right\}$.



c) $4 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$. $S = \left\{x / x \geq \frac{4}{3}\right\}$.



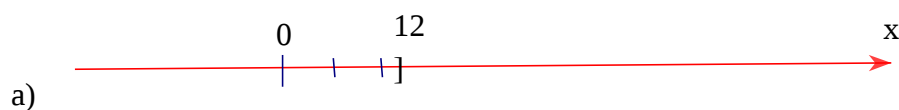
d) $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. $S = \left\{x / x \leq \frac{5}{2}\right\}$.



Ví dụ 11. (Bài 26, trang 47 SGK)

Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ?

(Kể ba bất phương trình có cùng tập nghiệm).



Giải

a) $\{x/x \leq 12\}$ là tập nghiệm của ba bất phương trình sau :

$$2x \leq 24 ; x+1 \leq 13 ; -x+1 \geq -11 .$$

b) $\{x/x \geq 8\}$ là tập nghiệm của ba bất phương trình sau :

$$2x \geq 16 ; x+2 \geq 10 ; -x \leq -8 ;$$

Ví dụ 12. (Bài 31, trang 48 SGK)

Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

a) $\frac{15-6x}{3} > 5 ;$

b) $\frac{8-11x}{4} < 13$

c) $\frac{1}{4}(x-1) < \frac{x-4}{6}$

d) $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5} .$

Giải

a) $\frac{15-6x}{3} > 5 \Leftrightarrow 15-6x > 15 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

$S = \{x/x < 0\} :$

b) $\frac{8-11x}{4} < 13 \Leftrightarrow 8-11x < 52 \Leftrightarrow -11x < 44 \Leftrightarrow x > -4 .$

$S = \{x/x > -4\} :$

c) $\frac{1}{4}(x-1) < \frac{x-4}{6} \Leftrightarrow 3(x-1) < 2(x-4) \Leftrightarrow 3x-3 < 2x-8 \Leftrightarrow x < -5 .$

$S = \{x/x < -5\} :$

d) $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5} \Leftrightarrow 5(2-x) < 3(3-2x) \Leftrightarrow 10-5x < 9-6x \Leftrightarrow x < -1 .$

$S = \{x/x < -1\} :$

Dạng 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Phương pháp giải

- Hai bất phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm
- Các quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân biến đổi bất phương trình mới tương đương với bất phương trình ban đầu .

Giải thích sự tương đương :

a) $x-3 > 1 \Leftrightarrow x+3 > 7 ;$

b) $-x < 2 \Leftrightarrow 3x > -6 .$

Giải

a) **Cách 1.** Ta có : $x - 3 > 1 \Leftrightarrow x > 4$; $x + 3 > 7 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy $x - 3 > 1 \Leftrightarrow x + 3 > 7$ vì hai bất phương trình có cùng tập nghiệm $\{x / x > 4\}$.

Cách 2. Cộng hai vế của $x - 3 > 1$ cho 6 ta được $x + 3 > 7$.

b) $-x < 2 \Leftrightarrow (-3) \cdot (-x) > (-3) \cdot 2 \Leftrightarrow 3x > -6$

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm $\{x / x > -2\}$.

Ví dụ 14. (Bài 34, trang 49 SGK)

Đo. Tìm sai lầm trong các "lời giải" sau :

a) Giải bất phương trình $-2x > 23$. Ta có :

$$-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2 \Leftrightarrow x > 25.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 25$.

b) Giải bất phương trình $-\frac{3}{7}x > 12$. Ta có :

$$-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}x\right) > \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 12 \Leftrightarrow x > -28.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -28$.

Giải

a) Sai lầm trong lời giải ở biến đổi : $-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2$.

Biến đổi đúng là : $-2x > 23 \Leftrightarrow x < -\frac{23}{2}$.

b) Sai lầm trong lời giải là nhân cho số âm $-\frac{7}{3}$ hai vế bất phương trình mà không đổi chiều bất đẳng thức. Biến đổi đúng là :

$$-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}x\right) < \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot 12$$

Dạng 5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

- Gọi x là ẩn cần tìm, tìm điều kiện cho x.
- Lập bất phương trình theo yêu cầu của đề bài.
- Giải bất phương trình để tìm x.

Ví dụ 15. (Bài 30, trang 48 SGK)

Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá : loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng.

Giải

Gọi x là số tờ giấy bạc loại 5000 đồng (x nguyên dương).

Số tờ giấy bạc loại 2000 đồng là : $15 - x$

Số tiền người đó có : $5000x + 2000(15 - x)$.

Theo đề bài ta có :

$$5000x + 2000(15 - x) \leq 70000 \Leftrightarrow 3000x \leq 40000 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3}.$$

Vì x nguyên nên $x \leq 13$.

Vậy số tờ giấy bạc loại 5000 không vượt quá 13.

Ví dụ 16. (Bài 33, trang 48 SGK)

Đố. Trong một kì thi, bạn Chiến phải thi bốn môn Văn, Toán, Tiếng Anh và Hóa. Chiến đã thi ba môn và được kết quả như bảng sau:

Môn	Văn	Tiếng Anh	Hóa
Điểm	8	7	10

Kì thi quy định muốn đạt loại giỏi phải có điểm trung bình các môn thi là 8 trở lên và không có môn nào bị điểm dưới 6. Biết môn Văn và Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt loại giỏi bạn Chiến phải có điểm thi môn Toán ít nhất là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là điểm thi môn Toán của Chiến ($x \geq 6$).

Điểm trung bình các môn thi của Chiến là:

$$(2x + 2 \cdot 8 + 7 + 10) : 6 = \frac{2x + 33}{6}$$

Theo đề bài ta có bất phương trình:

$$\frac{2x + 33}{6} \geq 8 \Leftrightarrow 2x + 33 \geq 48 \Leftrightarrow 2x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq 7,5.$$

Vậy để đạt loại giỏi bạn Chiến phải có điểm thi môn Toán ít nhất là 7,5 điểm.

C. LUYỆN TẬP

- (Dạng 3), Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :
 - $3x - 7 \leq 0$;
 - $5x + 18 > 0$;
 - $9 - 2x < 0$;
 - $-11 - 3x \geq 0$;
- (Dạng 2) Giải các bất phương trình sau :
 - $2x - 3a \geq 0$;
 - $a + 1 - 5x \geq 0$;
 - $(a - 1)x + 2a + 1 < 0$ với $a > 1$;
 - $(2a + 1)x - 1 - a \geq 0$ với $a < -\frac{1}{2}$.
- (Dạng 2). Với a là số cho trước, giải các bất phương trình sau :
 - $(a^2 + 1)x + a - 1 < 0$;
 - $(a^2 - 2a + 2)x \geq 2a + 3$;
 - $(2a - a^2 - 2)x + 7 \leq 0$;
- (Dạng 2)
 - Tìm các nghiệm nguyên dương của bất phương trình : $17 - 3x \geq 0$;
 - Tìm các nghiệm nguyên âm của bất phương trình : $4x + 13 > 0$;
 - Tìm các nghiệm tự nhiên của bất phương trình : $4x - 19 \leq 0$.
- Định m để bất phương trình : $(m^2 - 4m + 3)x + m - m^2 < 0$ có nghiệm đúng với mọi x .

5. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Áp dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để rút gọn :

$$|x| = \begin{cases} x & , khi \ x \geq 0 \\ -x & khi \ x < 0 \end{cases}$$

- Giải phương trình không có dấu giá trị tuyệt đối.
- Chọn nghiệm thích hợp trong trường hợp đang xét.
- Tính chất : $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x|^2 = x^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp giải

1. Phương trình dạng : $|A(x)| = B(x)$ (*).

a) $A(x) \geq 0$ (1): (*) trở thành : $A(x) = B(x)$ (2).

Giải (2) và chọn nghiệm thỏa (1) ta được nghiệm của (*).

b) $A(x) < 0$ (3) : (*) trở thành : $-A(x) = B(x)$ (4)

Giải (4) và chọn nghiệm thỏa (3) ta được nghiệm của (*) .

c) Kết luận : Nghiệm của (*) là tất cả các nghiệm vừa tìm được trong các trường hợp trên .

2. Phương trình dạng : $|A(x)| = |B(x)|$ (**)

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \end{cases}$$

3. Phương trình chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối : Ta xét dấu trong từng khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối .

Ví dụ 1. (Bài 35, trang 51 SGK)

Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức :

a) $A = 3x + 2 + |5x|$ trong hai trường hợp : $x \geq 0$ và $x < 0$;

b) $B = |-4x| - 2x + 12$ trong hai trường hợp : $x \leq 0$ và $x > 0$;

c) $C = |x - 4| - 2x + 12$ khi $x > 5$;

d) $D = 3x + 2 + |x + 5|$.

Giải

a) Với $x \geq 0$ ta có $A = 3x + 2 + 5x = 8x + 2$.

Với $x < 0$ ta có $A = 3x + 2 - 5x = -2x + 2$.

b) Với $x \leq 0$ ta có $B = -4x - 2x + 12 = -6x + 12$

Với $x > 0$ ta có $B = 4x - 2x + 12 = 2x + 12$

c) Với $x > 5$ ta có $C = x - 4 - 2x + 12 = -x + 8$.

d) Với $x \geq -5$ ta có $D = 3x + 2 + x + 5 = 4x + 7$.

Với $x < -5$ ta có $D = 3x + 2 - x - 5 = 2x - 3$.

Ví dụ 2.(Bài 36, trang 51 SGK)

Giải các phương trình:

a) $|2x| = x - 6$;

b) $|-3x| = x - 8$;

c) $|4x| = 2x + 12$;

d) $|-5x| - 16 = 3x$.

Giải

a) Với $x \geq 0$ ta có $|2x| = x - 6 \Leftrightarrow 2x = x - 6 \Leftrightarrow x = -6$ (loại).

Với $x < 0$ ta có $|2x| = x - 6 \Leftrightarrow -2x = x - 6 \Leftrightarrow x = 2$ (loại).

Vậy $S = \emptyset$.

b) Với $x \geq 0$ ta có $|-3x| = x - 8 \Leftrightarrow 3x = x - 8 \Leftrightarrow x = -4$ (loại).

Với $x < 0$ ta có $|-3x| = x - 6 \Leftrightarrow -3x = x - 8 \Leftrightarrow x = 2$ (loại).

Vậy $S = \emptyset$.

c) Với $x \geq 0$ ta có $|4x| = 2x + 12 \Leftrightarrow 4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 6$ (loại).

Với $x < 0$ ta có $|4x| = 2x + 12 \Leftrightarrow -4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = -2$ (loại).

Vậy $S = \{-2; 6\}$.

d) $S = \{8; -2\}$.

Ví dụ 3. (Bài 37, trang 51 SGK)

Giải các phương trình:

a) $|x - 7| = 2x + 3$;

b) $|x + 4| = 2x - 5$;

c) $|x + 3| = 3x - 1$;

d) $|x - 4| + 3x = 5$.

Giải

a) Với $x \geq 7$ ta có $|x - 7| = 2x + 3 \Leftrightarrow x - 7 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -10$ (loại).

Với $x < 7$ ta có $|x - 7| = 2x + 3 \Leftrightarrow -x + 7 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ (nhận).

Vậy $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

b) Với $x \geq -4$ ta có $|x+4| = 2x-5 \Leftrightarrow x+4 = 2x-5 \Leftrightarrow x=9$ (nhận).

Với $x < -4$ ta có $|x+4| = 2x-5 \Leftrightarrow -x-4 = 2x-5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (loại).

Vậy $S = \{9\}$.

c) Với $x \geq -3$ ta có $|x+3| = 3x-1 \Leftrightarrow x+3 = 3x-1 \Leftrightarrow x=2$ (nhận).

Với $x < -3$ ta có $|x+3| = 3x-1 \Leftrightarrow -x-3 = 3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$ (loại).

Vậy $S = \{2\}$.

d) Với $x \geq 4$ ta có $|x-4| + 3x = 5 \Leftrightarrow x-4 + 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (loại).

Với $x < 4$ ta có $|x-4| + 3x = 5 \Leftrightarrow -x+4 + 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (nhận).

Vậy $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

a) $|x+1|-1=5$;

b) $|x-1|+|2-x|=3$;

c) $|2-x|=|2x-3|$.

Giải

a) $|x+1|-1=5 \Leftrightarrow |x+1|-1=\pm 5$.

• $|x+1|-1=5 \Leftrightarrow |x+1|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=6 \\ x+1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-7. \end{cases}$

• $|x+1|-1=-5 \Leftrightarrow |x+1|=-4$. Vô nghiệm (vì $|x+1| \geq 0$).

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{-7; 5\}$.

b) $|x+1|+|2-x|=3$ (1)

x	1	2		
$ x-1 $	$1-x$	$x-1$	$x-1$	
$ 2-x $	$2-x$	$2-x$	$x-2$	
$ x+1 + 2-x $	$3-2x$	1	1	$2x-3$

i) $x < 1$: (1) trở thành: $3-2x=3 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ (nhận);

ii) $1 \leq x \leq 2$: (1) trở thành: $1=3$!!: Phương trình vô nghiệm;

iii) $x > 2$: (1) trở thành: $2x-3=3 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$ (nhận);

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{0; 3\}$.

c) **Cách 1.** Áp dụng $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$, ta có:

$$|2-x| = |2x-3| \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 2x-3 \\ 2-x = 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{5}{3}\right\}.$$

Cách 2. Áp dụng $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$, ta có :

$$\begin{aligned} |2-x| = |2x-3| &\Leftrightarrow (2-x)^2 = (2x-3)^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 - (2x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (5-3x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{5}{3}\right\}.$$

Dạng 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp giải

Áp dụng một số tính chất:

1. $|A| \leq |B| \Leftrightarrow -B \leq A \leq B;$

$$|A| \geq |B| \Leftrightarrow A \geq B \text{ hoặc } A \leq -B.$$

2. $|A| \geq |B| \Leftrightarrow A^2 - B^2 \geq 0 \Leftrightarrow (A-B)(A+B) \geq 0.$

3. Nếu bất phương trình có nhiều dấu giá trị tuyệt đối thì có thể xét dấu để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình:

a) $|2x-1| < x+1;$

b) $|x-2| > \frac{x+1}{2};$

c) $|x-1| + |x-2| > x+3.$

Giải

a) **Cách 1.** (Dùng định nghĩa)

i) Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ thì $2x-1 \geq 0$ và $|2x-1| = 2x-1$. Khi đó:

$$|2x-1| < x+1 \Leftrightarrow 2x-1 < x+1 \Leftrightarrow x < 2.$$

Vậy: $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. (1)

ii) Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $2x-1 < 0$ và $|2x-1| = 1-2x$. Khi đó:

$$|2x-1| < x+1 \Leftrightarrow 1-2x < x+1 \Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy: $0 < x < \frac{1}{2}$. (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được nghiệm: $0 < x < 2$.

Cách 2. (Dùng tính chất)

Ta có: $|2x-1| < x+1 \Leftrightarrow -x-1 < 2x-1 < x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 < 2x-1 \\ 2x-1 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3x \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

b) **Cách 1.** (Dùng định nghĩa).

i) Nếu $x \geq 2$ thì $x-2 \geq 0$ và $|x-2| = x-2$. Khi đó:

$$|x-2| > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x-2 > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2x-4 > x+1 \Leftrightarrow x > 5 \text{ (nhận)}.$$

ii) Nếu $x < 2$ thì $2-x > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 4-2x > x+1 \Leftrightarrow x < 1 \text{ (nhận)}.$

Vậy nghiệm của bất phương trình: $x < 1$ hoặc $x > 5$.

Cách 2. (Dùng tính chất).

Ta có: $|x-2| > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > \frac{x+1}{2} \\ x-2 < -\frac{x+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 > x+1 \\ 2x-4 < -x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < 1. \end{cases}$

c) $|x-1| + |x-2| > x+3$. (1)

i) $x < 1$: (1) trở thành: $3-2x > x+3 \Leftrightarrow 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ (nhận)};$

ii) $1 \leq x \leq 2$: (1) trở thành: $1 > x+3 \Leftrightarrow x < -2 \text{ (loại)};$

iii) $x > 2$: (1) trở thành: $2x-3 > x+3 \Leftrightarrow x > 6 \text{ (nhận)}.$

Vậy nghiệm của bất phương trình: $x < 0$ hoặc $x > 6$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP ÔN TRONG SGK

38. Cho $m > n$. Chứng minh :

a) $m + 2 > n + 2$;

b) $-2m < -2n$;

c) $2m - 5 > 2n - 5$;

d) $4 - 3m < 4 - 3n$.

Giải

a) Áp dụng tính chất: Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$, ta có:

$$m > n \Rightarrow m + 2 > n + 2 .$$

b) $m > n \Rightarrow (-2)m < (-2)n \Rightarrow -2m < -2n .$

c) $m > n \Rightarrow 2m > 2n \Rightarrow 2m - 5 > 2n - 5 .$

d) $m > n \Rightarrow -3m < -3n \Rightarrow 4 - 3m < 4 - 3n .$

39. Kiểm tra xem -2 là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau :

a) $-3x + 2 > -5$;

b) $10 - 2x < 2$;

c) $x^2 - 5 < 1$;

d) $|x| < 3$;

e) $|x| > 2$;

f) $x + 1 > 7 - 2x$.

Giải

Thay $x = -2$ vào các bất phương trình ta thấy: a); c); d) thỏa còn b); e); f) không thỏa. Vậy -2 là nghiệm của các bất phương trình a); c); d).

40. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số:

a) $x - 1 < 3$;

b) $x + 2 > 1$;

c) $0,2x < 0,6$;

d) $4 + 2x < 5$.

Giải

a) $x - 1 < 3 \Leftrightarrow x < 4$. Vậy $S = \{x / x < 4\}$.

b) $x + 2 > 1 \Leftrightarrow x > -1$. Vậy $S = \{x / x > -1\}$.

c) $0,2x < 0,6 \Leftrightarrow x < 3$. Vậy $S = \{x / x < 3\}$.

d) $4 + 2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$. Vậy $S = \left\{x / x < \frac{1}{2}\right\}$.

41. Giải các bất phương trình:

$$a) \frac{2-x}{4} < 5;$$

$$b) 3 \leq \frac{2x+3}{5};$$

$$c) \frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5};$$

$$d) \frac{2x+3}{-4} \geq \frac{4-x}{-3}.$$

Giải

$$a) \frac{2-x}{4} < 5 \Leftrightarrow 2-x < 20 \Leftrightarrow x > -18. S = \{x / x > -18\}.$$

$$b) 3 \leq \frac{2x+3}{5} \Leftrightarrow 15 \leq 2x+3 \Leftrightarrow x \geq 6. S = \{x / x \geq 6\}.$$

$$c) \frac{4x-5}{3} > \frac{7-x}{5} \Leftrightarrow 20x-25 > 21-3x \Leftrightarrow x > 2. S = \{x / x > 2\}.$$

$$d) \frac{2x+3}{-4} \geq \frac{4-x}{-3} \Leftrightarrow -3(2x+3) \leq -4(4-x)$$

$$\Leftrightarrow -6x-9 \leq -16+4x \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{10}.$$

$$S = \left\{x / x \geq \frac{7}{10}\right\}.$$

42. Giải các bất phương trình:

$$a) 3-2x > 4;$$

$$b) 3x+4 < 2;$$

$$c) (x-3)^2 < x^2-3;$$

$$d) (x-3)(x+3) < (x+2)^2+3.$$

Giải

$$a) 3-2x > 4 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}. S = \left\{x / x < -\frac{1}{2}\right\}.$$

$$b) 3x+4 < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}. S = \left\{x / x < -\frac{2}{3}\right\}.$$

$$c) (x-3)^2 < x^2-3 \Leftrightarrow x^2-6x+9 < x^2-3 \Leftrightarrow x > 2. S = \{x / x > 2\}.$$

$$d) (x-3)(x+3) < (x+2)^2+3 \Leftrightarrow x^2-9 < x^2+4x+4+3 \Leftrightarrow x > -4. S = \{x / x > -4\}.$$

43. Tìm x sao cho:

a) Giá trị của biểu thức $5-2x$ là số dương;

b) Giá trị của biểu thức $x+3$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x-5$;

c) Giá trị của biểu thức $2x+1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $x+3$;

d) Giá trị của biểu thức x^2+1 không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-2)^2$.

Giải

a) $5 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$.

Nếu $x < \frac{5}{2}$ thì giá trị của biểu thức $5 - 2x$ là số dương.

b) $x + 3 < 4x - 5 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$.

Nếu $x > \frac{8}{3}$ thì giá trị của biểu thức $x + 3$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $4x - 5$.

c) $2x + 1 \geq x + 3 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Nếu x không nhỏ hơn 2 ($x \geq 2$) thì giá trị của biểu thức $2x + 1$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $x + 3$.

d) $x^2 + 1 \leq (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$.

Nếu x không lớn hơn $\frac{3}{4}$ ($x \leq \frac{3}{4}$) thì giá trị của biểu thức $x^2 + 1$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x - 2)^2$.

44. Đố. Trong một cuộc thi đố vui, Ban tổ chức quy định mỗi người dự thi phải trả lời 10 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn 4 đáp án, nhưng trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Người dự thi chọn đáp án đúng sẽ được 5 điểm, chọn đáp án sai sẽ bị trừ 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, Ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 10 điểm và quy định người nào có tổng số điểm từ 40 trở lên mới được dự thi ở vòng tiếp theo. Hỏi người dự thi phải trả lời chính xác bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi tiếp ở vòng sau?

Giải

Để được dự thi tiếp ở vòng sau người dự thi phải trả lời được ít nhất 30 điểm. Vậy người dự thi phải trả lời chính xác ít nhất 6 câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi tiếp ở vòng sau.

45. Giải các phương trình:

a) $|3x| = x + 8$;

b) $|-2x| = 4x + 18$;

c) $|x - 5| = 3x$;

d) $|x + 2| = 2x - 10$.

Giải

a) Với $x \geq 0$: $|3x| = x + 8 \Leftrightarrow 3x = x + 8 \Leftrightarrow x = 4$ (nhận)

Với $x < 0$: $|3x| = x + 8 \Leftrightarrow -3x = x + 8 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Vậy $S = \{-2; 4\}$

b) Với $x \geq 0$: $|-2x| = 4x + 18 \Leftrightarrow 2x = 4x + 18 \Leftrightarrow x = -9$ (loại)

Với $x < 0$: $|-2x| = 4x + 18 \Leftrightarrow -2x = 4x + 18 \Leftrightarrow x = -3$ (nhận)

Vậy $S = \{-3\}$

c) Với $x \geq 5$: $|x - 5| = 3x \Leftrightarrow x - 5 = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (loại)

Với $x < 5$: $|x - 5| = 3x \Leftrightarrow -x + 5 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (nhận)

Vậy $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

d) Với $x \geq -2$: $|x + 2| = 2x - 10 \Leftrightarrow x + 2 = 2x - 10 \Leftrightarrow x = 12$ (nhận)

Với $x < -2$: $|x + 2| = 2x - 10 \Leftrightarrow -x - 2 = 2x - 10 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$ (loại)

Vậy $S = \{12\}$

B. BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $ax + 4 > 2x + a^2$

b) $\frac{ax+1}{a-1} > \frac{ax-1}{a+1}$ với $a > 1$

2. Giải bất phương trình: $\frac{2x+1}{x+2} \leq 1$

3. Giải các bất phương trình:

a) $x + \frac{x-1}{a} < \frac{x+1}{a} - (a-2)x$

b) $(a+1)x + \frac{ax-1}{a} > \frac{1}{a}$

c) $(a^2 + a + 1)x - 3a > (2+a)x + 5a$

4. Định m để bất phương trình sau có nghiệm đúng với mọi x:

$$(m^2 - 4m + 3)x + m - m^2 < 0$$

5. Định m để hai bất phương trình sau có tập nghiệm trùng nhau:

$$(m-1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m+1)x - m + 2 > 0$$

6. Xác định m để hai bất phương trình sau có đúng một nghiệm chung:

$$m(x-2) + 4 \leq x \text{ và } m(x-1) \geq x-2$$

7. Giải và biện luận bất phương trình:

$$-1 \leq \frac{x+m}{mx+1} \leq 1$$

8. Giải các bất phương trình:

a) $|2x-1| \geq x-1$

b) $|2x+5| > |7-4x|$

$$c) \left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1$$

9. Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |x-m| \leq m \\ |x-1+m| \leq 2m \end{cases}$$

10. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a) \quad a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \text{ với } a+b=1$$

$$b) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} \text{ với } a+b+c=1$$

$$c) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n} \text{ với } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

11. Cho a, b, c thỏa mãn các điều kiện: $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$. Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương.

12. Cho a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$$a(1-b) > \frac{1}{4}; \quad b(1-c) > \frac{1}{4}; \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

13. Cho ba số dương a, b, c có tích bằng 1 và $a+b+c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

$$a) \quad (a-1)(b-1)(c-1) > 0$$

$$b) \quad \text{Trong ba số a, b, c có một số lớn hơn 1, hai số còn lại nhỏ hơn 1.}$$

14. Tìm số có hai chữ số sao cho tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.

$$a) \quad \text{Nhỏ nhất.}$$

$$b) \quad \text{Lớn nhất.}$$