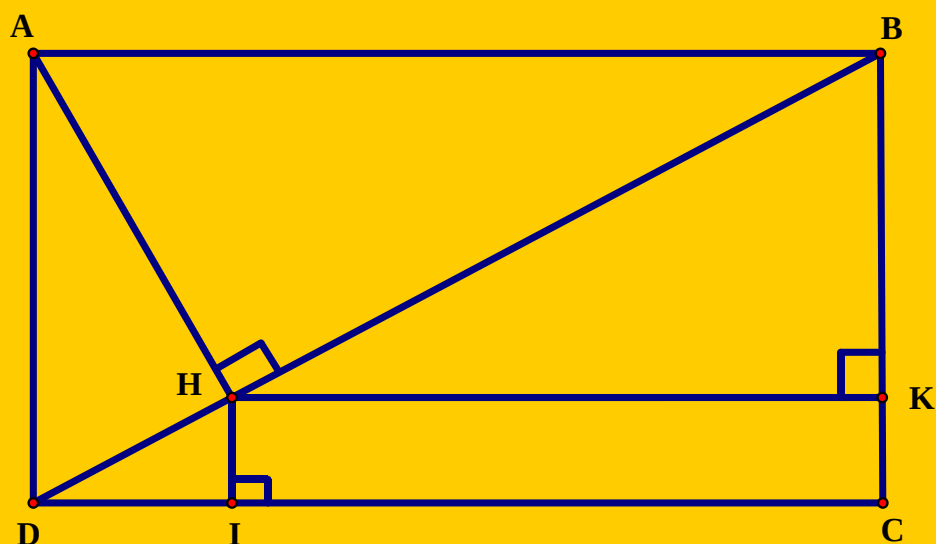


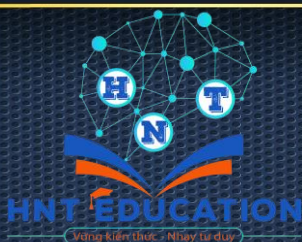
CHƯƠNG

1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG



VỮNG KIẾN THỨC – NHẠY TƯ DUY



GV. LƯƠNG ANH NHẬT

CHƯƠNG I HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 1: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. Đặt vấn đề

Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Chứng minh

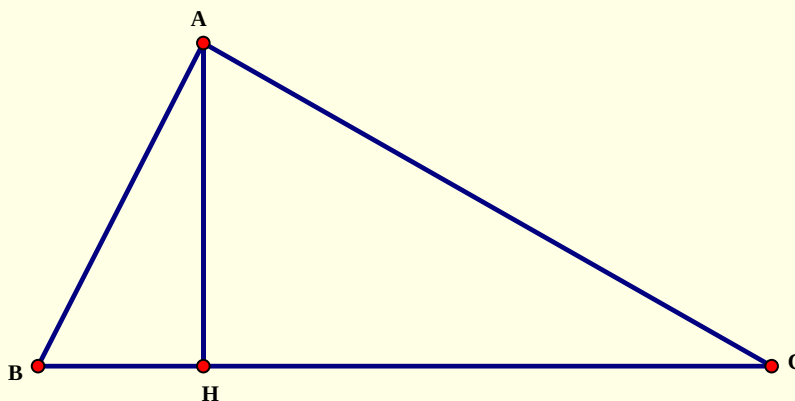
a) $AB^2 = BH.BC$, $AC^2 = CH.CB$.

b) $AB.AC = AH.BC$.

c) $AH^2 = BH.CH$.

d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Giải



a) Xét hai tam giác vuông ABH và CBA có ABH chung nên $\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (g.g)

Suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH.BC$

Tương tự, cũng có $AC^2 = CH.CB$

b) Vì $\triangle HBA \sim \triangle ABC$ (cmt)

nên $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB.AC = AH.BC$

c) Xét hai tam giác vuông ABH và CHA có $HAB = ACH$ (cùng phụ ABC)

Nên $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g)

Suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$

d) Ta có $AH.BC = AB.AC \Leftrightarrow \frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB.AC} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2.AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2}$

Vậy $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

II. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác

Từ kết quả của phần trên, ta suy ra

- **Định lý 1:** Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.
- **Định lý 2:** Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với đường cao tương ứng của cạnh huyền đó.
- **Định lý 3:** Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
- **Định lý 4:** Trong một tam giác vuông, nghịch đảo bình phương đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương của hai cạnh góc vuông.

Ta dùng các kết quả nêu trên như là một công thức và được phép sử dụng.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông ở A có đường cao AH . Biết $BH = 12,5$ cm, và $CH = 72$ cm. Tính AH , AB và AC .

Giải

Ta có $BC = BH + CH = 12,5 + 72 = 84,5$

Lại có $AH^2 = BH \cdot CH = 12,5 \cdot 72 = 900 \Rightarrow AH = 30$ cm

$AB^2 = BH \cdot BC = 12,5 \cdot 84,5 = 1056,25 \Rightarrow AB = 32,5$ cm

$AC^2 = CH \cdot CB = 72 \cdot 84,5 = 6084 \Rightarrow AC = 78$ cm

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết $AC = 40$ cm, $AH = 24$ cm. Tính AB , BC , BH và CH .

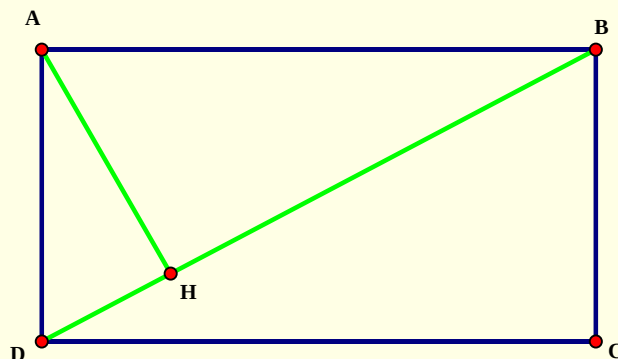
Giải

Ta có $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$ cm

$AC^2 = CH \cdot CB \Rightarrow CB = \frac{AC^2}{CH} = \frac{40^2}{32} = 50$ cm

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ cm

$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{30^2}{50} = 18$ cm



Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$, qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại H . Biết $AB = 20$ cm, $AH = 12$ cm. Tính các cạnh còn lại và đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$.

Giải

Ta có $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 14$ cm

Áp dụng $AB^2 = BH.BD \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BH} = \frac{20^2}{14} = \frac{200}{7}$ cm

$AD.AB = AH.BD \Rightarrow AD = \frac{AH.BD}{AB} = \frac{12 \cdot \frac{200}{7}}{20} = \frac{120}{7}$ cm

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Biết $AB = 15$ cm, $BH = 9$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Giải

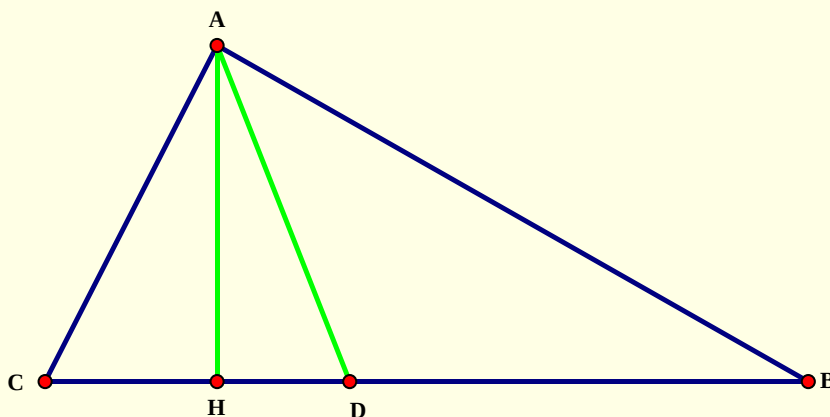
Ta có $AB^2 = BH.BC \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{15^2}{9} = 25$ cm $\Rightarrow CH = BC - BH = 25 - 9 = 16$ cm

Khi đó $AH^2 = BH.CH = 9.16 \Rightarrow AH = \sqrt{9.16} = 12$ cm

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} 12.25 = 150$ cm²

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao, phân giác AD . Biết $BD = 15$ cm, $DC = 20$ cm. Tính độ dài AD .

Giải



Ta có AD là đường phân giác của tam giác ABC

Suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Đặt $AB = x \Rightarrow AC = \frac{3}{4}x$ với $x > 0$

Lại có $BC = BD + CD = 35$ cm

Áp dụng định lý Pytago, ta có

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 35^2 \Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 = 35^2 \Leftrightarrow x^2 = 784 \Leftrightarrow x = 28$$

$$\Rightarrow AB = 28 \text{ cm và } AC = 21 \text{ cm}$$

$$\text{Áp dụng } AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{28^2}{35} = \frac{112}{5} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow HD = BH - BD = \frac{112}{5} - 15 = \frac{37}{5} \text{ cm}$$

$$\text{Ta lại có } AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{28.21}{35} = \frac{84}{5} \text{ cm}$$

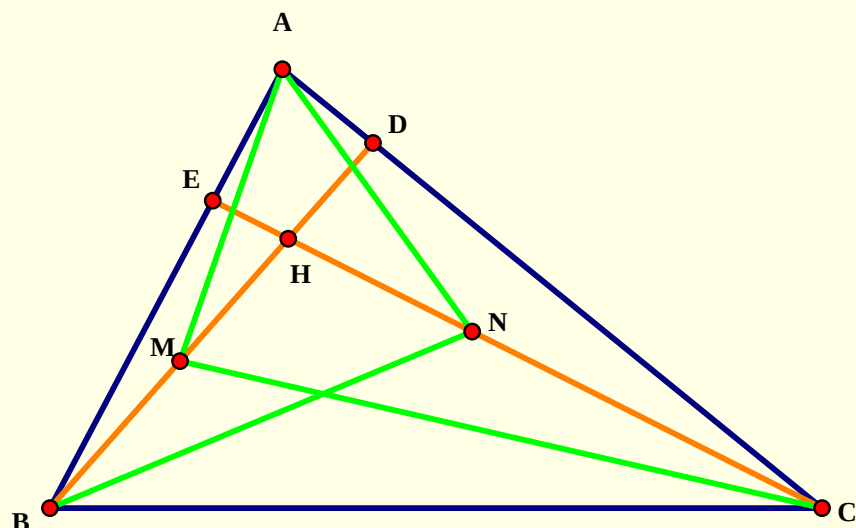
$$\text{Khi đó } AD^2 = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{\left(\frac{84}{5}\right)^2 + \left(\frac{37}{5}\right)^2} = \sqrt{337} \text{ cm.}$$

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC nhọn, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Trên đoạn HB lấy điểm M sao cho $AMC = 90^\circ$ và trên đoạn HC lấy N sao cho $ANB = 90^\circ$. Chứng minh

a) $AD.AC = AE.AB$

b) $AM = AN$

Giải



a) Xét hai tam giác vuông ABD và ACE có $\angle BAC$ chung nên $\triangle ABD \sim \triangle ACE$

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$$

b) Xét tam giác vuông AMC có MD là đường cao nên $MA^2 = AD.AC$

xét tam giác vuông ANB có NE là đường cao nên $NA^2 = AE.AB$

$$\text{Mà } AD.AC = AE.AB$$

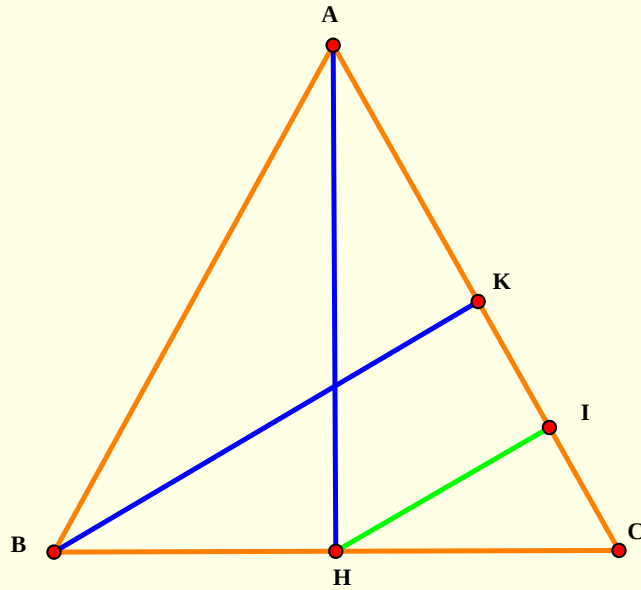
$$\text{Do đó } MA^2 = NA^2 \Rightarrow AM = AN.$$

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao AH và BK . Chứng minh

a) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$

b) $BC^2 = 2CK.CA$

Giải



a) Vẽ HI vuông góc AC tại I

Suy ra HI là đường trung bình của tam giác BCK

$$\text{Nên } HI = \frac{1}{2} BK$$

Xét tam giác AHC vuông tại H có HI là đường cao

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{BK}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{BC}{2}\right)^2} + \frac{1}{AH^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4}{BK^2} = \frac{4}{BC^2} + \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$$

b) Xét tam giác AHC có

$$CH^2 = CI \cdot CA \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{CK}{2} \cdot CA \Leftrightarrow \frac{BC^2}{4} = \frac{CK}{2} \cdot CA \Leftrightarrow BC^2 = 2CK \cdot CA$$

Bài tập

1.1 Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Biết $AB = 13,6$ cm, $AC = 25,5$ cm. Tính AH , BH và CH .

1.2 Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Biết $AB = 15$ cm, $CH = 16$ cm. Tính độ dài AC , BC và AH .

1.3 Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Biết $BC = 28,9$ cm, $AH = 12$ cm. Tính độ dài AB và AC .

1.4 Cho tam giác ABC có đường cao AH , trung tuyến AM và $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 13$ cm. Tính độ dài AM và AH .

1.5 Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết rằng $\frac{HB}{HC} = \frac{9}{16}$ và $AH = 48$ cm. Tính AB , AC và BC .

1.6 Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 125$ cm. Tính độ dài AH .

1.7 Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Biết tam giác ABM là tam giác đều và có cạnh bằng $\sqrt{3}$ cm.

a) Tính độ dài AC và AH .

b) Tính diện tích tam giác ABC .

1.8 Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = \sqrt{5}$ cm, đường cao $AH = \sqrt{3}$ cm. Gọi M và N là trung điểm của HC và AC . Tính độ dài AM và BN .

1.9* Cho tam giác ABC cân có $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm, các đường cao AH và BK . Vẽ tia Bx vuông góc AB tại B . Gọi M là giao điểm của tia Bx và tia AC . Tính diện tích tam giác ABM (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

1.10 Cho hình vuông $ABCD$. Một điểm bất kỳ trên cạnh BC . Đường thẳng AI cắt DC tại K . Chứng minh $\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I trên cạnh BC (I không trùng với B và C).

1.11 Cho tam giác ABC vuông ở A có I là trung điểm AB . Kẻ IH vuông góc với BC tại H . Chứng minh $\frac{1}{4IH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

1.12 Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , đường chéo AC và BD vuông góc nhau. Chứng minh $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}$.

1.13 Hình vuông $ABCD$ có I thuộc cạnh BC (I khác B và C). Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AI và DC . Chứng minh $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2}$.

1.14* Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD và K , I lần lượt là hình chiếu của H trên BC và CD . Chứng minh

a) $\frac{HB}{HD} = \frac{a^2}{b^2}$

b) $HK = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$

1.15 Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = a$. Các đường trung tuyến AM và BN vuông góc nhau. Tính AC và BC theo a .

1.16 Cho tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao. Vẽ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Chứng minh

a) $AEHF$ là hình chữ nhật.

d) $AH^3 = EB \cdot BC \cdot CF$

b) $AE \cdot AB = AD \cdot AC$

e) $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BE}{CF}$

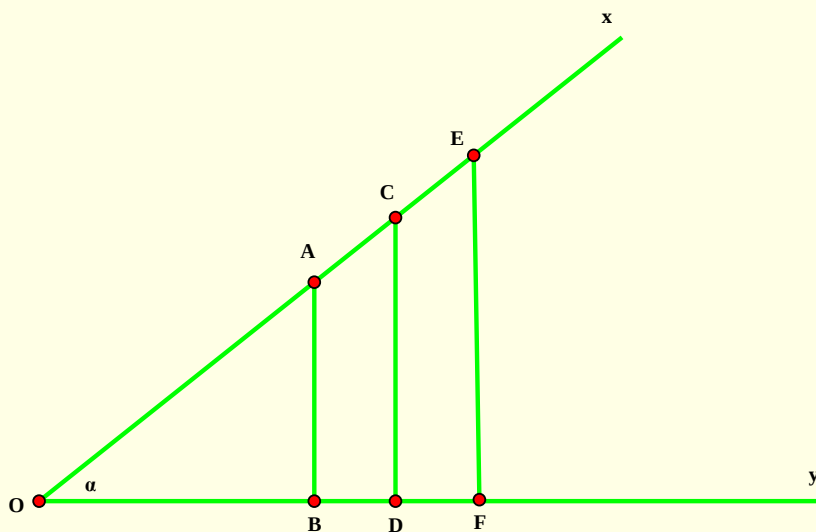
c) $EA \cdot EB + FA \cdot FC = HB \cdot HC$

f) $\frac{BH^3}{CH^3} = \frac{BE^2}{CF^2}$

BÀI 2: TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

I. Khái niệm tỷ số lượng giác của một góc nhọn

_ Cho góc $xOy = \alpha$. Từ điểm A trên Ox (A khác O) vẽ $AB \perp Oy$ tại B .



Bên cạnh đó, ta lấy thêm các điểm C và E trên Ox rồi lần lượt vẽ $CD \perp Oy$ tại D và $EF \perp Oy$ tại F .

Ta thấy các tỷ số $\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE}$, $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE}$, $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF}$ và $\frac{OB}{AB} = \frac{OD}{CD} = \frac{OF}{EF}$

Việc ta lấy thêm các điểm C và E cũng giống như việc tịnh tiến hay còn gọi là thay đổi vị trí của A trên Ox

Như vậy, các tỷ số ban đầu là $\frac{AB}{OA}$, $\frac{OB}{OA}$, $\frac{AB}{OB}$ và $\frac{OB}{AB}$ không phụ thuộc vào vị trí của A trên Ox

mà chỉ phụ thuộc vào độ lớn của xOy .

Ta gọi

_ Tỷ số $\frac{AB}{OA}$ là sin của góc α và ký hiệu là $\sin \alpha$.

_ Tỷ số $\frac{OB}{OA}$ là cosin của góc α và ký hiệu là $\cos \alpha$.

_ Tỷ số $\frac{AB}{OB}$ là tang của góc α và ký hiệu là $\tan \alpha$.

_ Tỷ số $\frac{OB}{AB}$ là cotang của góc α và ký hiệu là $\cot \alpha$.

Các tỷ số trên gọi chung là tỷ số lượng giác của góc α và các tỷ số này luôn dương. Hơn nữa, ta cũng có

$$\sin \alpha < 1 \text{ và } \cos \alpha < 1$$

II. Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau

_ Định lý: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia và tang góc này bằng cotang góc kia.

Ví dụ 1: Cho $\alpha = 60^\circ$ và $\beta = 30^\circ$. Khi đó $\sin \alpha = \cos \beta$ và $\tan \alpha = \cot \beta$.

III. Một số hệ thức cơ bản

Cho α là góc nhọn, ta có các hệ thức sau

$$\text{a) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{b) } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{c) } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Ví dụ 2: Cho α là góc nhọn và $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của α .

Giải

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2\sqrt{2}$$

IV. Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

α	30°	45°	60°
Tỷ số lượng giác			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài toán so sánh các giá trị lượng giác

Cho hai góc nhọn a và b , ta có

- $a < b \Rightarrow \sin a < \sin b$ và $\tan a < \tan b$
- $a < b \Rightarrow \cos a > \cos b$ và $\cot a > \cot b$

Ví dụ 3: Sắp xếp các tỷ số dưới đây theo tỷ lệ tăng dần.

a) $\sin 40^\circ, \cos 28^\circ, \sin 68^\circ, \cos 88^\circ$.

b) $\tan 65^\circ, \cot 42^\circ, \tan 76^\circ, \cot 27^\circ$.

Giải

a) Ta có $\sin 40^\circ = \cos 50^\circ, \sin 68^\circ = \cos 22^\circ$ khi đó $\cos 88^\circ < \cos 50^\circ < \cos 28^\circ < \cos 22^\circ$

Hay $\cos 88^\circ < \sin 40^\circ < \cos 28^\circ < \sin 68^\circ$.

b) Ta có $\tan 65^\circ = \cot 25^\circ, \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$ khi đó $\cot 42^\circ < \cot 27^\circ < \cot 25^\circ < \cot 14^\circ$

Hay $\cot 42^\circ < \cot 27^\circ < \tan 65^\circ < \tan 76^\circ$.

Ví dụ 4: Hãy so sánh $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$; $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$ với α là góc nhọn.

Giải

- $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$

Ta có $\tan \alpha > \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha > \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow 1 > \cos \alpha$ (đúng)

- $\cos \alpha$ và $\cot \alpha$

Ta có $\cos \alpha < \cot \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha < \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha < \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha < 1$ (đúng)

Ví dụ 5: Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$.

b) $B = \sin^2 14^\circ + \sin^2 76^\circ + \tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ - \frac{3 \sin 54^\circ}{\cos 36^\circ}$.

Giải

a) Ta có $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

$$= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)$$

$$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

b) Ta có $B = \sin^2 14^\circ + \sin^2 76^\circ + \tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ - \frac{3 \sin 54^\circ}{\cos 36^\circ}$

$$= \sin^2 14^\circ + \cos^2 14^\circ + \tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ - \frac{3 \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ} = 1 + 1 - 3 = -1$$

Ví dụ 6: Cho $\tan a = 3$. Tính $P = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$.

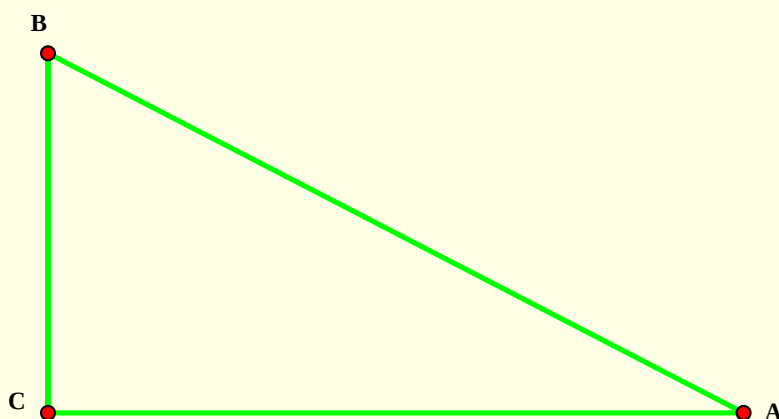
Giải

Bài tập

BÀI 3: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. Các hệ thức

_ Cho tam giác ABC vuông ở C , ta có các hệ thức lượng giác của góc A như sau



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

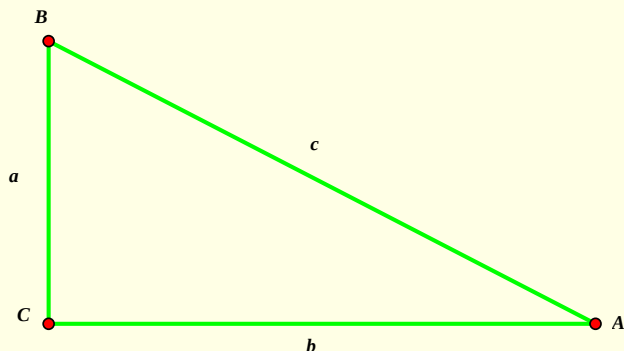
$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC}$$

Định lý

- Trong một tam giác vuông mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc cosin góc kề.
- Trong một tam giác vuông thì cạnh góc vuông này bằng cạnh góc vuông kia nhân với tan góc đối hoặc cotang góc kề.

Cho tam giác ABC vuông ở C với $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$ khi đó



$$a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \sin B = c \cdot \cos A$$

$$a = b \cdot \tan A = b \cdot \cot B$$

$$b = a \cdot \tan B = a \cdot \cot A$$

II. Giải tam giác vuông

_ Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc của tam giác vuông đó khi biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn của nó.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC vuông ở C biết $AC = 4$ cm và $BC = 3$ cm .

Giải

Ta có $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$ cm

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle A \approx 37^\circ \Rightarrow \angle B = 53^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông ở C biết $AB = 13$ cm và $A = 23^\circ$.

Giải

Ta có $A = 23^\circ \Rightarrow B = 90^\circ - A = 67^\circ$

$$AC = AB \cdot \cos A = 13 \cdot \cos 23^\circ \approx 12 \text{ cm} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}.$$

Ví dụ 3: Giải tam giác ABC vuông ở C biết $BC = 20$ cm và $A = 43^\circ$.

Giải

Ta có $A = 43^\circ \Rightarrow B = 90^\circ - A = 47^\circ$

$$AC = BC \cdot \cot A = 20 \cdot \cot 43^\circ \approx 21 \text{ cm}, AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{20}{\sin 43^\circ} \approx 29 \text{ cm}.$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $A = 75^\circ$, $B = 45^\circ$ và $AB = 6$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Giải

Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$

Vẽ $AD \perp BC$

Xét tam giác vuông ABD ta có $AD = AB \cdot \sin B = 6 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

$$BD = AB \cos B = 6 \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Xét tam giác vuông ACD ta có $CD = AD \cdot \cot C = AD \cdot \cot 60^\circ = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$ cm

Do đó $BC = BD + CD = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$ cm

Vậy diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^2$.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao $BK = h$ và

$ABC = \alpha$. Tính các cạnh của của tam giác theo h và α .

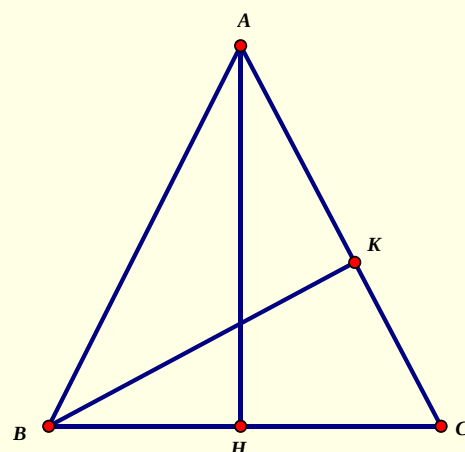
Giải

Tam giác ABC cân nên $ACB = ABC = \alpha$

$$\text{Ta có } BK = BC \cdot \sin \alpha \Rightarrow BC = \frac{BK}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Vẽ đường cao AH của tam giác ABC suy ra H là trung điểm

$$BC \text{ nên } BH = CH = \frac{BC}{2} = \frac{h}{2 \sin \alpha}$$



Trong tam giác AHC ta có $CH = AC \cdot \cos \alpha \Rightarrow AC = \frac{CH}{\cos \alpha} = \frac{h}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$

Do đó $AB = AC = \frac{h}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$.

Ví dụ 6: Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, biết $AB = 5 \text{ cm}$, $CD = 13 \text{ cm}$ và BD vuông góc với BC .

- Tính độ dài đường cao BH của hình thang.
- Tính diện tích hình thang.
- Tính các góc của hình thang.

Giải

- Kẻ AK vuông CD tại K , ta có $\triangle AKD = \triangle BHC$ suy ra $DK = CH$

Lại có $ABHK$ là hình bình hành có một góc vuông nên $ABHK$ là hình chữ nhật

$$\text{Suy ra } HK = AB = 5 \text{ cm} \Rightarrow DK = CH = \frac{DC - HK}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Như vậy } DH = DK + HK = 4 + 5 = 9 \text{ cm}$$

$$\text{Xét tam giác } DBC \text{ có } BH^2 = DH \cdot CH = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow BH = 6 \text{ cm}.$$

- Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2}(5 + 13) \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$.

- Xét tam giác BHC có $\tan C = \frac{BH}{CH} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow C \approx 56^\circ 19'$

$$\text{Suy ra } D = 56^\circ 19' \text{ và } DAB = CBA = 180^\circ - 56^\circ 19' = 123^\circ 41'.$$

Bài tập

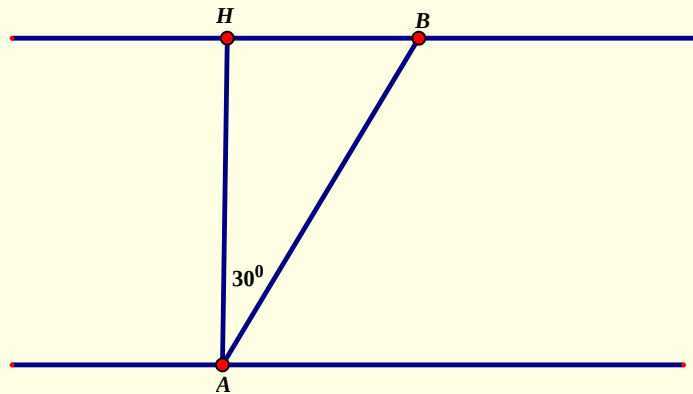
3.1 Với góc a nhọn. Chứng minh $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$, $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ và $\tan a \cdot \cot a = 1$.

3.2

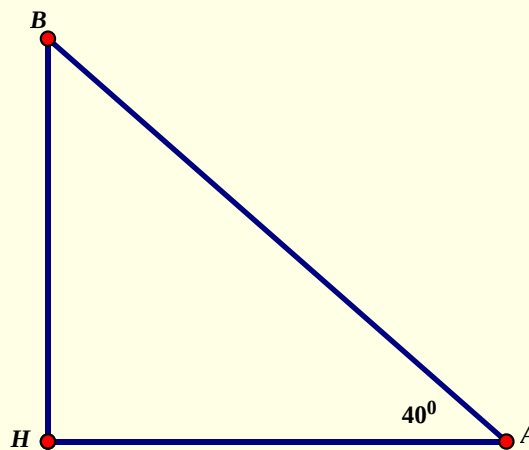
- Giải tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 5 \text{ cm}$ và $AC = 8 \text{ cm}$.
- Giải tam giác DEF vuông tại D biết $DE = 100 \text{ cm}$ và $E = 51^\circ$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 3AB$. Tính giá trị C .
- Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = 3BC$. Tính giá trị B .

3.3 Tính góc nhọn α biết rằng $\sin \alpha = \cos \alpha$.

3.4 Một chiếc đò ở điểm A muốn băng ngang qua sông theo đường AH nhưng bị nước cuốn đến điểm B cách H một đoạn bằng 50m. Tìm độ rộng của con sông và quãng đường đò đã đi với dữ kiện được thêm ở hình dưới đây.



3.5 Một chiếc máy bay đang bay ở độ cao 900 m. Một người quan sát nhìn chiếc máy bay đó dưới góc $\alpha = 40^\circ$ (như hình bên dưới). Tính khoảng cách từ người quan sát đến máy bay.



3.6 Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $AB = 15$ cm, $BC = 20$ cm. Tính độ dài các góc và các cạnh còn lại của tam giác ABC .

3.7 Cho tam giác ABC có AH là đường cao. Biết $AB = 25$ cm, $B = 70^\circ$ và $C = 50^\circ$. Tính độ dài AH và BC .

3.8 Cho tam giác ABC có $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$ và $AB = 6$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

3.9 Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ và $AB = 12$ cm. Tính diện tích tam giác ABC .

3.10 Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 4$ cm, $AH = 4$ cm và $D = 70^\circ$. Vẽ hai đường cao AH và BK . Biết rằng $KBC = 50^\circ$. Tính BC và DC .

3.11 Cho hình bình hành $ABCD$ có BD vuông góc với BC . Biết $AB = a$ và $A = \alpha$. Tính diện tích $ABCD$ theo a và α .

3.12 Cho tam giác nhọn ABC có $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, $AB = c$. Tính độ dài AC , BC theo c .

3.13* Cho tam giác ABC vuông ở C . Chứng minh $\tan \frac{A}{2} = \frac{BC}{AB + AC}$.

Áp dụng kết quả trên tính giá trị lượng giác của góc 15° .

3.14* Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

Áp dụng kết quả trên tính giá trị lượng giác của góc 75° .

3.15 Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BE và CD . Chứng minh $DE = BC \cdot \cos A$.

HƯỚNG DẪN MỘT SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG I

BÀI 1: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TỔNG TAM GIÁC VUÔNG

1.1

Dùng Pytago tìm được $BC = 28,9$ cm

Áp dụng $AB.AC = AH.BC \Rightarrow AH = 12$ cm

Áp dụng $AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = 6,4$ cm và $CH = 22,5$ cm.

1.2 Đặt $BH = x \Rightarrow BC = x + 16 \Rightarrow BH.BC = AB^2 \Rightarrow x^2 + 16x + 64 = 289 \Rightarrow x = 9$ và tính được $AH = 12$ cm, $BC = 25$ cm và $CA = 20$ cm.

1.3

Cách 1:

Đặt $BH = x \Rightarrow CH = BC - x = 28,9 - x$

$\Rightarrow BH.CH = AH^2 \Rightarrow (x - 14,45)^2 = 64,8025 \Rightarrow x = 22,5$ hay $x = 6,4$

Như vậy có hai trường hợp và kết quả là $AB = 25,5$ cm, $AC = 13,6$ cm và ngược lại.

Cách 2:

Xét $BC^2 = AB^2 + AC^2$ và $AB.AC = AH.BC$

Ta dùng
$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 + 2AB.AC = (AB + AC)^2 \\ AB^2 + AC^2 - 2AB.AC = (AB - AC)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB + AC = 39,1 \\ AB - AC = 11,9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} AB + AC = 39,1 \\ AC - AB = 11,9 \end{cases}$$

Kết quả thu được như **Cách 1**.

1.4

Kiểm tra được $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

Suy ra $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}$ cm

Áp dụng $AH.BC = AB.AC \Rightarrow AH = \frac{60}{13}$ cm

1.5

Đặt $HB = x \Rightarrow HC = \frac{9}{16}x$, với $x > 0$

Áp dụng $AH^2 = HB.HC \Rightarrow 48^2 = x \cdot \frac{9}{16}x \Rightarrow x = 64 \Rightarrow BH = 64$ cm và $CH = 36$ cm.

Suy ra $BC = BH + CH = 100$ cm

Áp dụng $AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow AB^2 = 64.100 = 6400 \Rightarrow AB = 80$ cm

Áp dụng định lý Pytago suy ra $AC = 60$ cm.

1.6

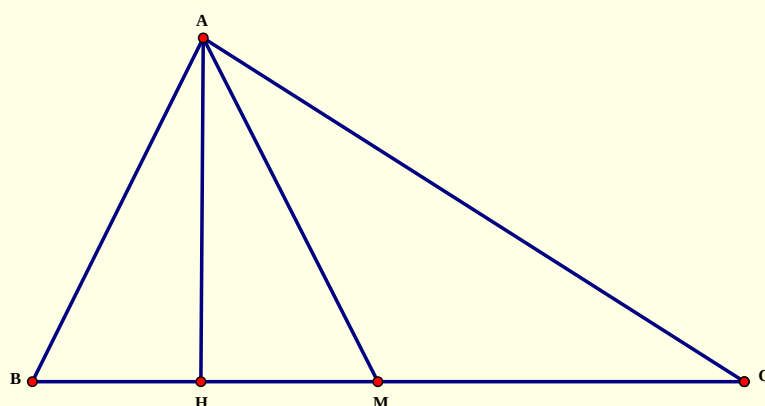
Đặt $AB = x \Rightarrow AC = \frac{3}{4}x$, với $x > 0$

Áp dụng định lý Pytago có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 125^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow x = 100$

Suy ra $AB = 100$ cm và $AC = 75$ cm

Áp dụng $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow AH = 60$ cm.

1.7



a) Ta có $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$ cm

Áp dụng định lý Pytago

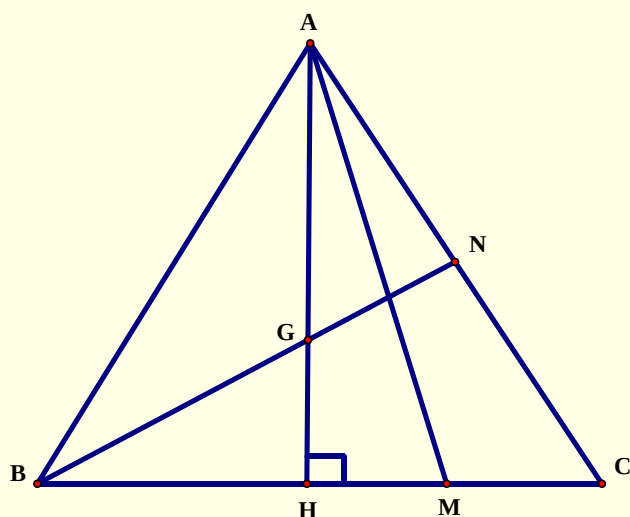
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3 \text{ cm}$$

Áp dụng

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

$$b) S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

1.8



Áp dụng định lý Pytago

$$BH^2 + AH^2 = AC^2 \Rightarrow BH = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow HM = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Áp dụng định lý Pytago

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ cm}$$

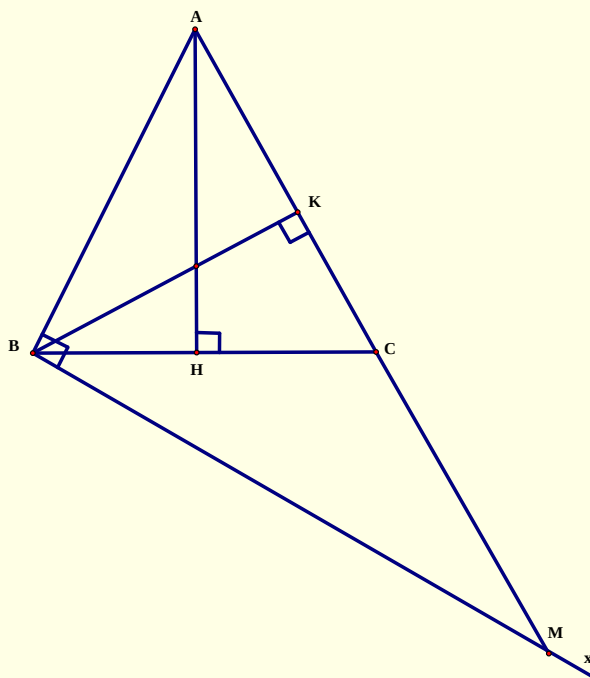
Gọi G là giao điểm AH và BN

$\Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC

Nên $GH = \frac{1}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

Áp dụng định lý Pytago $BN^2 = GH^2 + BH^2 \Rightarrow BN = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ cm} \Rightarrow BN = \frac{3}{2}BG = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ cm}$

1.9*



Tam giác ABC cân tại A có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HB = HC = \frac{BC}{2} = 3 \text{ cm}$$

Xét tam giác ABH

Áp dụng định lý Pytago

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 4 \text{ cm}$$

Dùng diện tích tam giác ABC có

$$\frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}BK \cdot AC \Rightarrow BK = 4,8 \text{ cm}$$

Xét tam giác ABK

Áp dụng định lý Pytago

$$AB^2 = AK^2 + BK^2 \Rightarrow AK = 1,4 \text{ cm}$$

Xét tam giác ABM

$$\text{Áp dụng } AB^2 = AK \cdot AM \Rightarrow AM = 17,9 \text{ cm}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABM \text{ là } S_{ABM} = \frac{1}{2}BK \cdot AM \approx 42,9 \text{ cm}^2.$$

1.10

Vẽ $AJ \perp AI$ với J thuộc CD

Xét hai tam giác vuông ABI và ADJ có

$AB = AD$ và $AIB = AJD$ nên $\triangle ABI = \triangle ADJ$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AJ^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2}$$

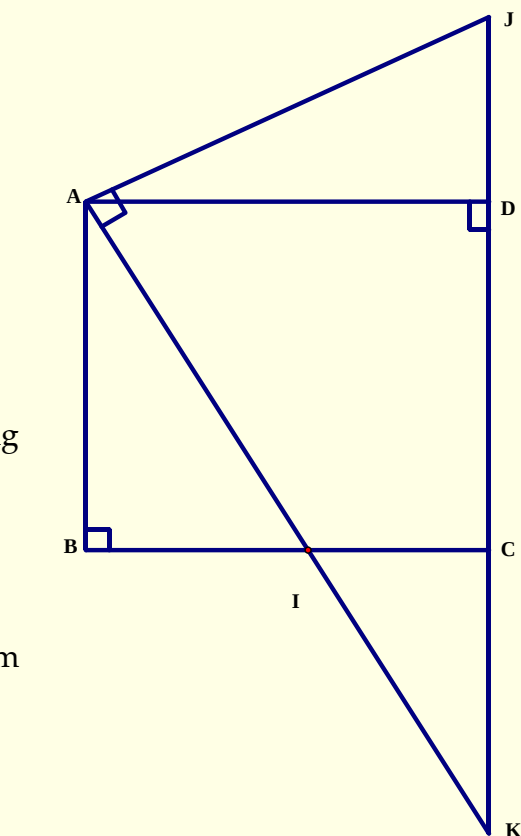
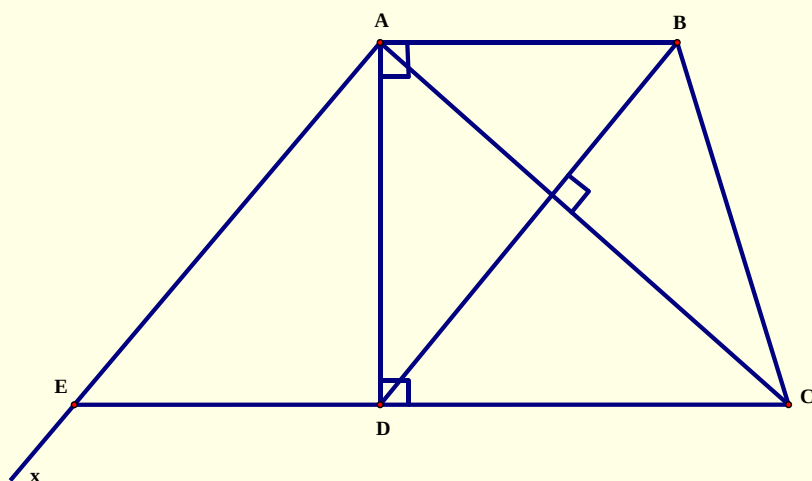
Vì AD không đổi nên $\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2}$ không đổi hay nó không

phụ thuộc vào vị trí của điểm I .

1.11 Tương tự Ví dụ 7 a)

Bạn đọc tự giải bằng cách vẽ thêm đường cao AK của tam giác ABC .

1.12



Vẽ tia Ax vuông góc với AC và cắt CD tại E

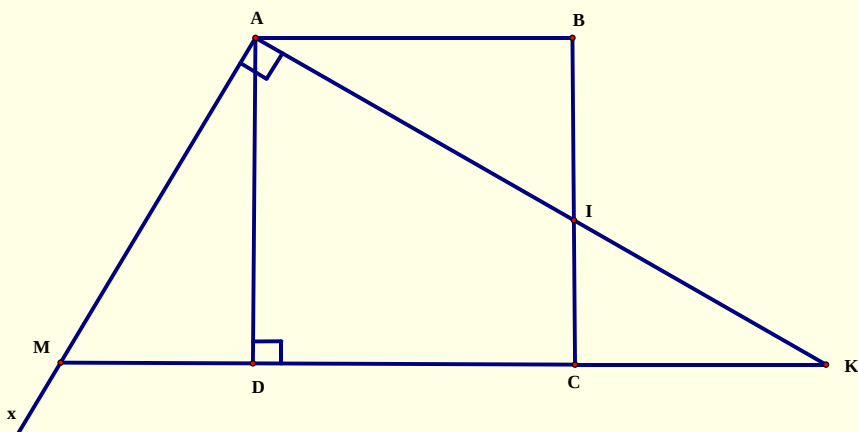
Xét tam giác vuông ACE

$$\text{Áp dụng } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Xét tứ giác $ABDE$, dễ thấy $ABDE$ là hình bình hành nên $AE = BD$.

$$\text{Vậy } \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{AE^2}.$$

1.13



Qua A vẽ Ax vuông góc với AK cắt đường thẳng CD tại M

Ta có $MAD = BAI$ (cùng phụ DAI) do đó

$$\triangle ADM = \triangle ABI \Rightarrow AM = AI$$

Xét tam giác MAK vuông tại A

Áp dụng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AK^2}$ mà $AB = AD$ và $AM = AI$ (cmt)

Vậy $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AK^2}$.

1.14

a) Xét tam giác ABD

Áp dụng $AB^2 = BH.BD \Rightarrow a^2 = BH.BD$

Tương tự, cũng có $b^2 = HD.BD$

Chia hai vế, ta có $\frac{HB}{HD} = \frac{a^2}{b^2}$

b) Vì $HK \parallel DC$ (cùng vuông góc với BC)

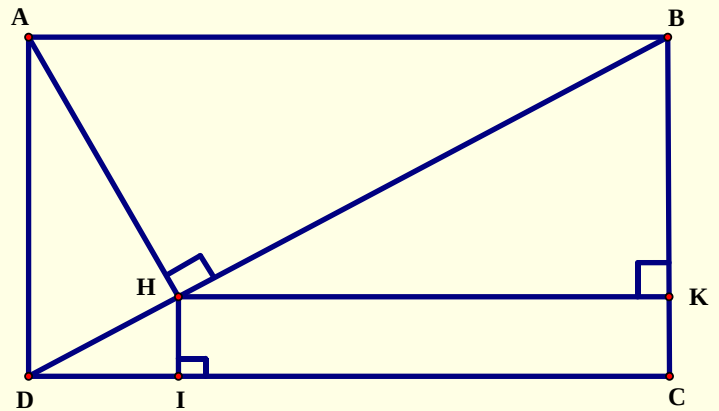
Hệ quả định lý Ta-lét cho ta

$$\frac{HK}{DC} = \frac{HB}{HD} \Rightarrow HK = \frac{DC.HB}{BC} = \frac{a.HB}{BD}$$

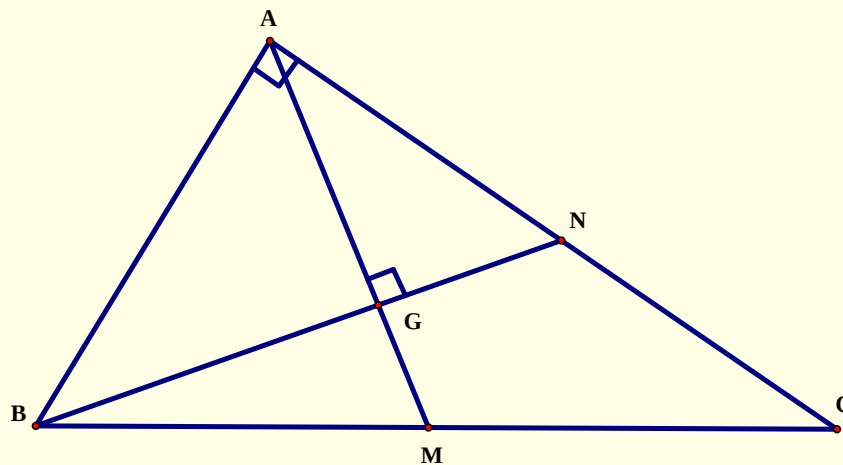
Mà $\frac{HB}{HD} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{HB+HD}{HB} = \frac{a^2+b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{BD}{HB} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ (dùng tính chất dãy tỷ số bằng nhau)

Suy ra $HB = \frac{BD.a^2}{a^2+b^2}$

Khi đó $HK = \frac{a \cdot \frac{BD.a^2}{a^2+b^2}}{BD} = \frac{a^3}{a^2+b^2}$.



1.15



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

Khi đó $BG = \frac{2}{3}BN$

Tam giác ABC vuông tại A

Áp dụng $AB^2 = BN.BG \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3}BN^2 \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Áp dụng định lý Pytago, ta có $AN^2 + AB^2 = BN^2 \Rightarrow AN^2 = \frac{3a^2}{2} - a^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lý Pytago, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

1.16

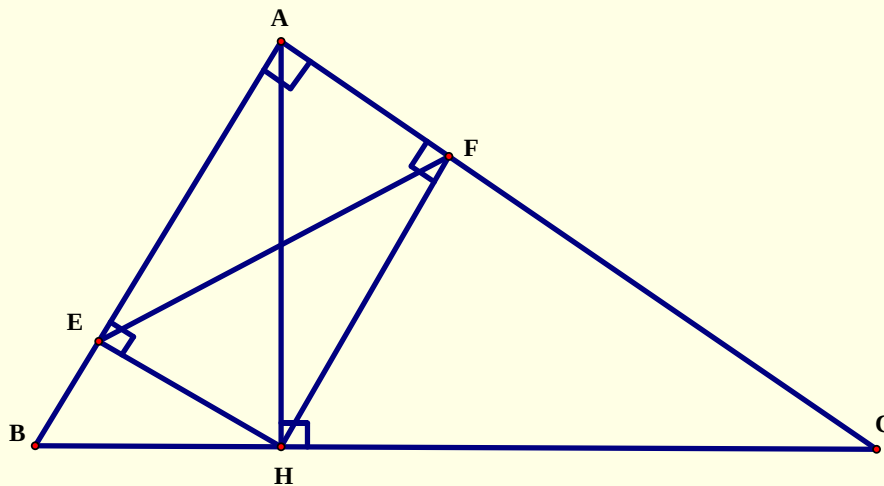
a) Tứ giác AEHF có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác AHB có $HA^2 = AE.AB$

Xét tam giác AHC có $HA^2 = AF.AC$

Vậy $AE.AB = AF.AC$

c) Xét tam giác AHB vuông tại H có HE là đường cao nên $HE^2 = EA.EB$



Xét tam giác AHC vuông tại H có HF là đường cao nên $HF^2 = FA.FC$

Xét tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao nên $AH^2 = HB.HC$

Ta có $EF^2 = HE^2 + HF^2 \Rightarrow EF^2 = EA.EB + FA.FC$

Tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên $AH = EF \Rightarrow AH^2 = EF^2$

Vậy $EA.EB + FA.FC = HB.HC$.

d) Xét tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao

Ta có $AH^2 = BH.CH \Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2$

Xét các tam giác ABH và ACH vuông tại H lần lượt có HE và HF là đường cao

Ta có $BH^2 = BE.BA$ và $CH^2 = CF.CA$

Suy ra $AH^4 = BE.BA.CA.CF = EB.AB.AC.CF$

Mà $AB.AC = AH.BC$ do đó $AH^4 = EB.AH.BC.CF \Rightarrow AH^3 = EB.BC.CF$.

e) Xét tam giác ABC vuông ở A có AH là đường cao

Ta có $AB^2 = BH.BC$ và $AC^2 = CH.BC$

$$\text{Suy ra } \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BH^2}{CH^2}$$

Mà $BH^2 = EB.AB$ và $CH^2 = CF.AC$

$$\text{Do đó } \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{EB.AB}{CF.AC} \Rightarrow \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{EB}{CF}.$$

f) Ta có $BH^2 = EB.AB$ và $CH^2 = CF.AC$ nên $BH^4 = EB^2.AB^2$ và $CH^4 = CF^2.AC^2$

$$\text{Suy ra } \frac{BH^4}{CH^4} = \frac{EB^2.AB^2}{CF^2.AC^2} = \frac{EB^2.BH.BC}{CF^2.CH.BC} = \frac{EB^2.BH}{CF^2.CF}$$

$$\text{Vậy } \frac{BH^3}{CH^3} = \frac{EB^2}{CF^2}.$$

BÀI 2: TỶ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN**2.1**

Áp dụng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}.$

2.2

Áp dụng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \alpha = \sqrt{3}.$

2.3

Dùng $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3}$ và $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

2.4

Dùng $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$ và $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = 1.$

2.5

Dùng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.6

a) $\sin 25^\circ, \cos 15^\circ, \sin 50^\circ, \cos 66^\circ.$

Ta có $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ và $\cos 66^\circ = \sin 24^\circ$

Mà $\sin 24^\circ < \sin 25^\circ < \sin 50^\circ < \sin 75^\circ$

Vậy thứ tự cần sắp là $\cos 66^\circ < \sin 25^\circ < \sin 50^\circ < \cos 15^\circ.$

b) $\cot 35^\circ, \tan 48^\circ, \cot 44^\circ, \tan 53^\circ, \cot 39^\circ.$

Ta có $\tan 48^\circ = \cot 42^\circ$ và $\tan 53^\circ = \cot 37^\circ$

Mà $\cot 44^\circ < \cot 42^\circ < \cot 39^\circ < \cot 37^\circ < \cot 35^\circ$

Vậy $\cot 44^\circ < \tan 48^\circ < \cot 39^\circ < \tan 53^\circ < \cot 35^\circ.$

2.7

a) $\sin 32^\circ$ và $\tan 32^\circ$

Dùng cách làm của **Ví dụ 4** có $\tan 32^\circ > \sin 32^\circ$

b) $\cos 35^\circ$ và $\cot 35^\circ$

Dùng cách làm của **Ví dụ 4** có $\cot 35^\circ > \cos 35^\circ$

c) $\sin 25^\circ$ và $\cot 55^\circ$

Ta có $\cot 55^\circ = \tan 35^\circ$ dùng **Ví dụ 4** ta có $\tan 35^\circ > \sin 35^\circ > \sin 25^\circ$

Vậy $\cot 55^\circ > \sin 25^\circ$.

d) $\cos 54^\circ$ và $\tan 42^\circ$

Ta có $\tan 42^\circ = \cot 48^\circ$ dùng **Ví dụ 4** ta có $\cot 48^\circ > \cos 48^\circ > \cos 54^\circ$

Vậy $\tan 42^\circ > \cos 54^\circ$.

2.8

Ta có $\tan 72^\circ = \cot 18^\circ$ và $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

Dùng **Ví dụ 4** ta có $\cot 36^\circ > \cos 36^\circ$

Mà $\cot 36^\circ < \cot 21^\circ < \cot 18^\circ$

Vậy $\sin 54^\circ < \cot 36^\circ < \cot 21^\circ < \tan 72^\circ$.

2.9

$$P = \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin a \cdot \cos a} = \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 1}{\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a}} = \frac{\tan^2 a - 1}{\tan a} = \frac{3^2 - 1}{3} = \frac{8}{3}.$$

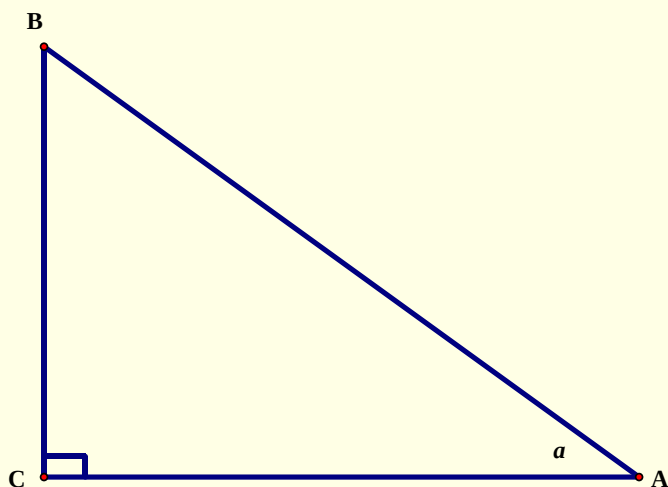
$$Q = \frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin^3 a + \cos^3 a} = \frac{\frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} - 1}{\frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + 1} = \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} = \frac{13}{14}.$$

2.10 Ta có $\cos^2 a - 2\sin^2 a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 a - 2\sin^2 a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3\sin^2 a = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 30^\circ$.

BÀI 3: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

3.1

Xét tam giác ABC vuông tại C , giả sử $A = a$.



Ta có $\sin a = \frac{BC}{AB}$, $\cos a = \frac{AC}{AB}$

Nên $\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2}$

Suy ra $\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$

$\tan a = \frac{BC}{AC} = \frac{BC/AB}{AC/AB} = \frac{\sin a}{\cos a}$

Tương tự $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ và $\tan a \cdot \cot a = 1$.

3.2

a) Áp dụng định lý Pytago $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{89}$ cm

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{\sqrt{89}} \Rightarrow B \approx 58^\circ \Rightarrow C \approx 32^\circ$.

b) $F = 39^\circ$, $DE = EF \cdot \cos E \Rightarrow EF \approx 158,9$ cm, $DF \approx 123,5$ cm.

c) $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow C \approx 19^\circ 28'$.

d) Vẽ đường cao AH suy ra $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}AB \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{6} \Rightarrow B \approx 80,4^\circ$.

3.3

Áp dụng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

3.4 Độ rộng con sông

Ta có $\tan 30^\circ = \frac{HB}{HA} \Rightarrow HA = \frac{HB}{\tan 30^\circ} = 50\sqrt{3}$ m

Quãng đường đã đi $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 100$ m.

3.5 Ta có $\sin 40^\circ = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB = \frac{HB}{\sin 40^\circ} = \frac{900}{\sin 40^\circ} \approx 1400,15$ m.

3.6 Vẽ đường cao AH của tam giác ABC

$$\text{Xét tam giác } AHB \text{ có } \cos ABH = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \cos ABH = \frac{15}{2} \text{ cm} \Rightarrow CH = BC - BH = \frac{25}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Lại có } \sin ABH = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Như vậy } AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 5\sqrt{13} \text{ cm} \Rightarrow \sin ACB = \frac{AH}{AC} \Rightarrow ACB \approx 56,1^\circ \Rightarrow BAC \approx 73,9^\circ.$$

3.7

Vẽ đường cao AH của tam giác ABC.

$$\text{Ta có } BH = AB \cdot \cos B = 25 \cdot \cos 70^\circ \approx 8,6 \text{ cm và } AH = AB \cdot \sin B = AB \cdot \sin 70^\circ = 25 \cdot \sin 70^\circ \approx 23,5 \text{ cm}$$

$$\text{Lại có } AH = AC \cdot \sin C \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin C} = \frac{23,5}{\sin 50^\circ} \approx 30,7 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow CH = AC \cdot \cos C = 30,7 \cdot \cos 50^\circ \approx 19,7 \text{ cm}$$

$$\text{Do đó } BC = BH + CH \approx 28,3 \text{ cm}.$$

3.8

Vẽ đường cao AD của tam giác ABC

$$\text{Áp dụng } AD = AB \cdot \sin B \Rightarrow AD = 3\sqrt{3} \text{ cm và } BD = AB \cdot \cos B \Rightarrow BD = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Xét tam giác } ACD \text{ có } CD = AD \cdot \cot C \Rightarrow CD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } BC = BD + CD = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{9}{2} (\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^2.$$

3.9

Vẽ đường cao CD của tam giác ABC

$$\text{Đặt } CD = x \text{ với } x > 0$$

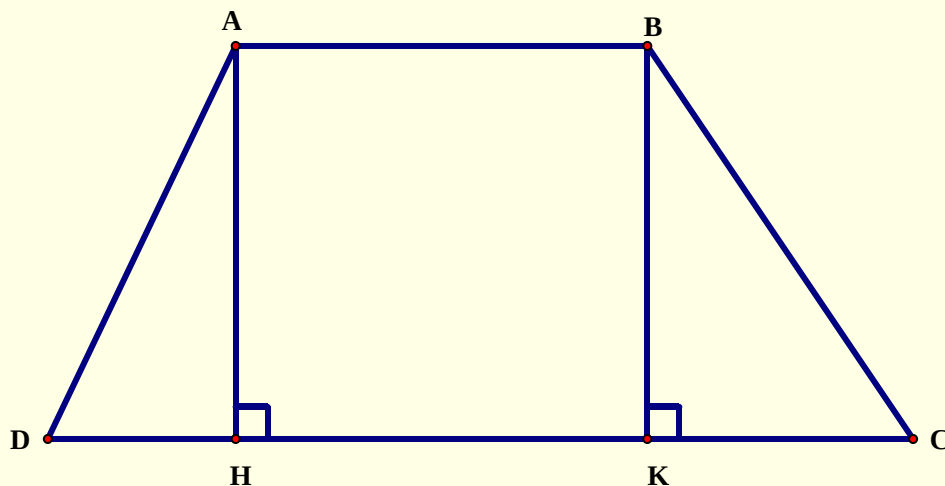
$$\text{Xét tam giác } ACD \text{ có } AD = CD \cdot \cot A \Rightarrow AD = \frac{x\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

$$\text{Xét tam giác } BCD \text{ có } BD = CD \cdot \cot B \Rightarrow BD = x \text{ cm}$$

$$\Rightarrow AB = AD + BD = x + x \frac{\sqrt{3}}{3} = 12 \Rightarrow x = 6(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 36(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

3.10



Để thấy $ABHK$ là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên nó là hình vuông.

Suy ra $BK = AH = 4$ cm

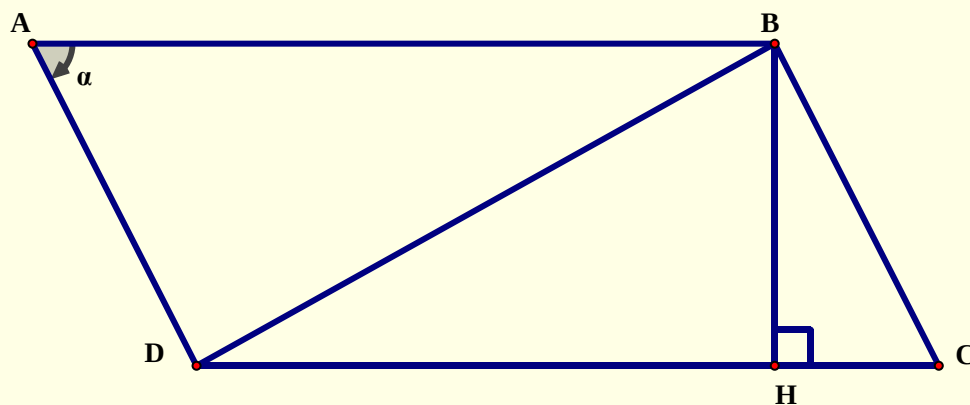
Xét tam giác BKC

Áp dụng $BK = BC \cdot \cos KBC \Rightarrow BC \approx 6,22$ cm và $KC = BK \cdot \tan KBC \approx 4,77$ cm

Tương tự, xét tam giác AHD tính được $DH = AH = \cot ADH \approx 1,46$ cm

Do đó $DC = DH + HK + KC \approx 10,23$ cm .

3.11



$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow C = A = \alpha$ và $DC = AB = a$

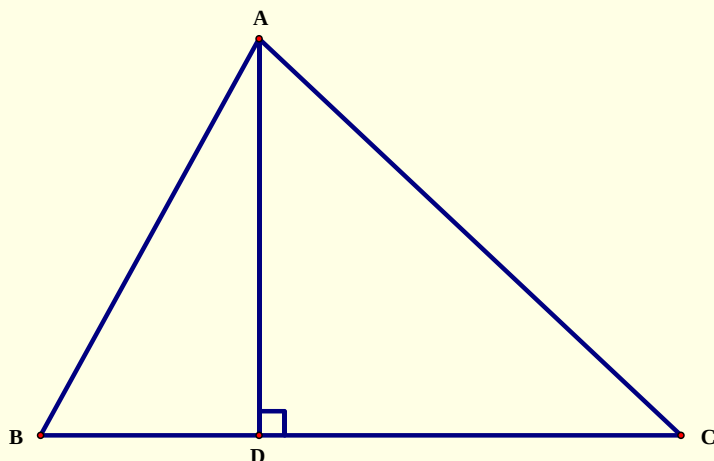
Xét tam giác vuông BCD có $BC = CD \cdot \cos C = a \cos \alpha$

Vẽ BH vuông góc CD

Áp dụng $BH = BC \cdot \sin C = a \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

Do đó $S_{ABCD} = DC \cdot BH = a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

3.12



Vẽ AD vuông góc BC

Xét tam giác ABD có $AD = AB \cdot \sin B$

Xét tam giác ACD có $AD = AC \cdot \sin C$

Do đó

$$AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

Tương tự ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

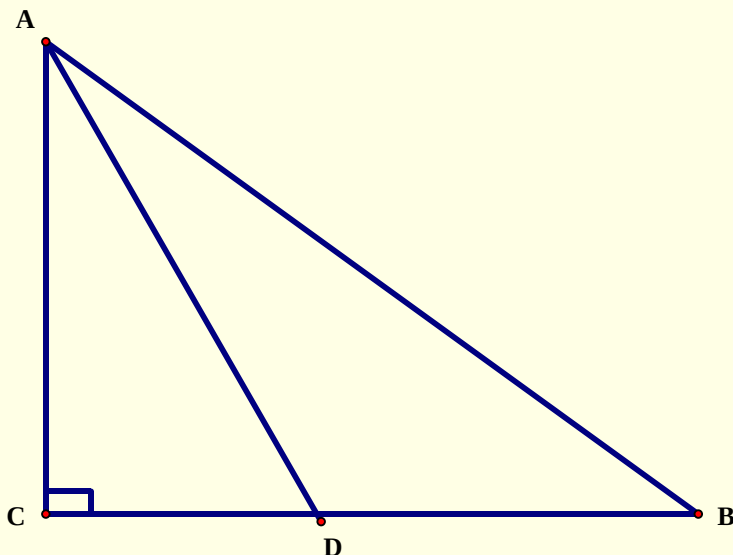
Như vậy $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = c \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác ABD có $BD = AB \cos B = \frac{c}{2}$

Xét tam giác ACD có $CD = AC \cdot \cos C = \frac{c\sqrt{3}}{2}$

Như vậy $BC = BD + CD = \frac{c(\sqrt{3} + 1)}{2}$.

3.13*



Vẽ đường phân giác AD của góc A

Nên $\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD + CD}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC} \text{ (tính chất}$$

dãy tỷ số bằng nhau)

Mà $\tan ACD = \tan \frac{A}{2} = \frac{CD}{AC}$

Vậy $\tan \frac{A}{2} = \frac{BC}{AB + AC}$

Xét tam giác ABC vuông ở C với $A = 30^\circ$

Đặt $BC = a$

Ta có $AC = BC \cdot \cot A = a\sqrt{3}$, $AB = \frac{BC}{\sin A} = 2a$

Dùng kết quả trên, ta có $\tan 15^\circ = \tan \frac{A}{2} = \frac{BC}{AB+AC} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$

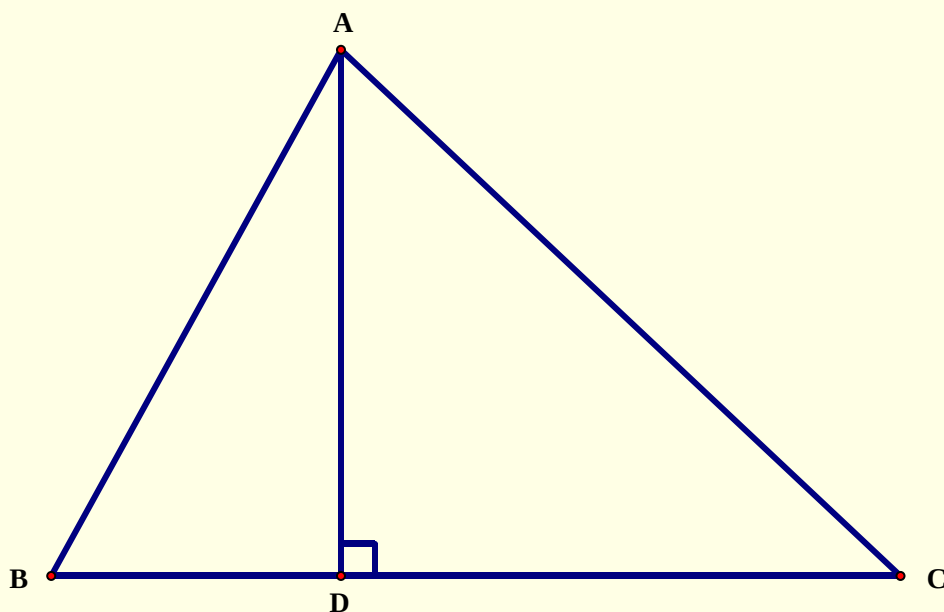
Lại có $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \Rightarrow \sin 15^\circ = (2-\sqrt{3})\cos 15^\circ$

Áp dụng $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \tan 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3.14*

Vẽ AD vuông góc BC

Xét tam giác ABD có $AD = AB \cdot \sin B$



Xét tam giác ACD có $AD = AC \cdot \sin C$

Do đó $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$. Tương tự ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

Dùng giả thiết bài 3.12 (bạn đọc có thể dùng giả thiết khác)

Ta có $\sin A = \frac{BC}{AB} \sin C = \frac{c(\sqrt{3}+1)}{c} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Dùng $\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1 \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Suy ra $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}, \cot 75^\circ = 2-\sqrt{3}$.

3.15 Xét tam giác AED và ABC có A chung và $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} (= \cos A)$ nên chúng đồng dạng

Suy ra $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A \Rightarrow DE = BC \cdot \cos A$