

MỤC LỤC

PHÂN DẠNG TOÁN CHỨA CĂN.....	4
A. TÌM HIỂU VỀ CĂN BẬC HAI.....	4
B. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ BIỂU THỨC XÁC ĐỊNH (CÓ NGHĨA, TỒN TẠI)	5
C. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN	7
DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA SỐ.....	7
I.1: Loại 1: Dạng chứa căn số học đơn giản.....	7
I.2: Loại 2: Dạng “biểu thức số trong căn” tiềm ẩn “là hằng đẳng thức”	10
I.3: Loại 3: Dạng sử dụng biểu thức liên hợp, trục căn thức, quy đồng.....	12
I.4: Loại 4: Chứng minh đẳng thức số.	15
I.5: Loại 5: Chứng minh bất đẳng thức	17
I.6: Loại 6: Căn bậc ba.	18
DẠNG 2: CÁC DẠNG TOÁN CĂN CHỨA CHỮ (CHỨA ẨN)	20
II.1. DẠNG 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC.....	20
<i>★</i> <i>Loại 1: Phương trình trong căn có thể viết dưới dạng bình phương của một biểu thức.....</i>	20
<i>★</i> <i>Loại 2: Phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$</i>	20
<i>★</i> <i>Loại 3: Phương trình chứa biểu thức dưới dấu căn không viết được dưới dạng bình phương (trong phương trình chỉ chứa một căn thức)</i>	21
<i>★</i> <i>Loại 4: Phương trình chứa nhiều căn thức, các căn thức có thể đưa về dạng giống nhau.....</i>	23
<i>★</i> <i>Loại 5: Phương trình chứa các căn khác nhau, biểu thức trong căn không viết được dưới dạng bình phương.....</i>	23
<i>★</i> <i>Loại 6: Quy về phương trình bậc hai bằng phương pháp đặt ẩn phụ.....</i>	24
<i>★</i> <i>Loại 7: Phương trình chứa căn mà biểu thức trong căn ở dạng thương hoặc dạng tích.....</i>	25
<i>★</i> <i>Loại 8: Giải các phương trình căn bậc ba</i>	26
II.2 DẠNG TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN	28
Loại 1: Sử dụng các Hằng đẳng thức	28
Loại 2: Sử dụng phương pháp quy đồng:.....	29
Loại 3: Làm xuất hiện nhân tử chung rồi đơn giản biểu thức chứa căn sau đó quy đồng.	31
II. 3. DẠNG TOÁN CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ	34

<i>Bài toán 1: Tìm ẩn để biểu thức thỏa mãn một điều kiện cho trước. (lớn hơn, nhỏ hơn, bằng một giá trị cho trước)</i>	<i>34</i>
<i>Bài toán 2. Tính giá trị của biểu thức tại giá trị cho trước.</i>	<i>34</i>
<i>Bài toán 3: Tìm a nguyên để biểu thức nguyên.</i>	<i>34</i>
<i>Bài toán 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.....</i>	<i>37</i>
2. PHẦN BÀI TẬP (Có hướng dẫn giải)	40
99 BÀI TOÁN TỔNG HỢP – TỰ GIẢI. (Sưu tầm).....	44
PHẦN ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN GIẢI	59
DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA SỐ.	59
I.1: Loại 1: Dạng chứa căn số học đơn giản.....	59
I.2: Loại 2: Dạng “biểu thức số trong căn” tiềm ẩn “là hằng đẳng thức”	60
I.3: Loại 3: Dạng sử dụng biểu thức liên hợp, trục căn thức, quy đồng.....	61
II.2 DẠNG TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN	64
Loại 1: Sử dụng các Hằng đẳng thức	64
Loại 2: Sử dụng phương pháp quy đồng:.....	66
Loại 3: Làm xuất hiện nhân tử chung rồi đơn giản biểu thức chứa căn sau đó quy đồng.	71
II. 3. DẠNG TOÁN CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ.....	80

Tài liệu này tôi tổng hợp kiến thức các nguồn trên mạng và của các nhà giáo trong các sách, mục đích sử dụng cho chính bản thân sử dụng trong quá trình dạy học học sinh lớp 9, dùng làm tài liệu tham khảo, cho học sinh làm các đề bài và dạy kèm nên khi tổng hợp còn nhiều thiếu sót về các dạng và cách giải. Rất mong sự thông cảm của quý bạn đọc giả.

Tài liệu không có các bài tập dạng nâng cao, phức tạp. Phù hợp với các đối tượng học sinh học lớp 9 và học ôn thi vào 10 các trường công lập trên cả nước với các dạng đề về căn bậc hai không khó.

Có bản word.

Nếu quý thầy cô nào có nhu cầu dùng nó để chế thành các dạng bài học để làm giáo án vui lòng liên hệ SDT: 0986 915 960

Hoặc theo fb: <https://www.facebook.com/hoa.toan.902266>

KIẾN THỨC LÝ THUYẾT

1. KIẾN THỨC QUAN TRỌNG CẦN NHỚ.

a, Tính chất về phân số (phân thức): $\frac{A.M}{B.M} = \frac{A}{B}$ ($M \neq 0, B \neq 0$)

b, Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

2. CÁC KIẾN THỨC VỀ CĂN BẬC HAI

1) Nếu $a \geq 0, x \geq 0, \sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$

2) Để $\sqrt{A}$ có nghĩa thì $A \geq 0$

3) $\sqrt{A^2} = |A|$

4) $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$)

5) $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0$ và $B > 0$)

6) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (với $B \geq 0$)

7) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$ và $B \geq 0$)

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$ và $B \geq 0$)

9) $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ (với $A, B \geq 0$ và $B \neq 0$)

10) $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$)

11) $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

(với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$)

12) $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$

(với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$)

PHÂN DẠNG TOÁN CHỨA CĂN

A. TÌM HIỂU VỀ CĂN BẬC HAI.

I. LÝ THUYẾT.

1. **Định nghĩa:** Căn bậc hai của số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

2. **Ký hiệu:** ♦ $a > 0$: $\sqrt{a}$: Căn bậc hai của số a
 $-\sqrt{a}$: Căn bậc hai âm của số a
 ♦ $a = 0$: $\sqrt{0} = 0$

3. **Chú ý:** Với $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

4. Căn bậc hai số học:

- ♦ Với $a \geq 0$: số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a
- ♦ Phép khi phương là phép toán tìm căn bậc hai số học của số a không âm.

So sánh các căn bậc hai số học: Với $a \geq 0, b \geq 0$: $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

1.1 Điền vào ô trống trong bảng sau:

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x^2										

1.2 Tính:

- a) $\sqrt{0,09}$ b) $\sqrt{-16}$ c) $\sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,16}$ d) $\sqrt{(-4) \cdot (-25)}$
 e) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ f) $\frac{6\sqrt{16}}{5\sqrt{0,04}}$ g) $\sqrt{0,36} - \sqrt{0,49}$

1.3 Trong các số sau, số nào có căn bậc hai:

- a) $\sqrt{5}$ b) 1,5 c) -0,1 d) $-\sqrt{9}$

1.4 Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có căn bậc hai:

- a) $(x-4)(x-6)+1$ b) $(3-x)(x-5)-4$
 c) $-x^2+6x-9$ d) $-5x^2+8x-4$
 e) $x(x-1)(x+1)(x+2)+1$ f) $x^2+20x+101$

(HD: Học sinh chứng minh biểu thức không âm)

1.5 Dùng kí hiệu $\sqrt{\quad}$ viết nghiệm của các phương trình dưới đây, sau đó dùng máy tính để tính chính xác nghiệm với 3 chữ số thập phân.

- a) $x^2 = 2$ b) $x^2 = 3$ c) $x^2 = 3,5$ d) $x^2 = 4,12$
 e) $x^2 = 5$ f) $x^2 = 6$ g) $x^2 = 2,5$ h) $x^2 = \sqrt{5}$

B. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ BIỂU THỨC XÁC ĐỊNH (CÓ NGHĨA, TỒN TẠI)

I. LÝ THUYẾT

1. Căn thức bậc hai:

✓ Nếu A là một biểu thức đại số thì $\sqrt{A}$ gọi là căn thức bậc hai của A .

A được gọi là **biểu thức lấy căn** hay **biểu thức dưới dấu căn**.

✓ $\sqrt{A}$ các định (có nghĩa) khi $A \geq 0$

✎ **Chú ý:**

a) Điều kiện có nghĩa của một số biểu thức:

- $A(x)$ là một đa thức $\Rightarrow A(x)$ luôn có nghĩa.
- $\frac{A(x)}{B(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)}$ có nghĩa khi $B(x) \neq 0; C(x) \neq 0; D(x) \neq 0$
- $\frac{\sqrt{A(x)}}{\sqrt{B(x)}} : \frac{\sqrt{C(x)}}{\sqrt{D(x)}}$ có nghĩa khi $A(x) \geq 0; B(x) > 0; C(x) > 0; D(x) > 0$
- $\sqrt{A(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A(x) \geq 0$
- $\frac{1}{\sqrt{A(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A(x) > 0$

b) Với $M > 0$, ta có:

- $X^2 \leq M^2 \Leftrightarrow |X| \leq |M| \Leftrightarrow -M \leq X \leq M$
- $X^2 \geq M^2 \Leftrightarrow |X| \geq |M| \Leftrightarrow X \leq -M \text{ hoặc } X \geq M$

2. Hằng đẳng thức $\sqrt{(A)^2} = |A|$

✓ **Định lý:** Với mọi số a , ta có: $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

✓ **Chú ý:** Tổng quát, với A là một biểu thức đại số, ta cũng có:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

II. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-3x}$

b) $\sqrt{4-2x}$

c) $\sqrt{-3x+2}$

d) $\sqrt{3x+1}$

e) $\sqrt{9x-2}$

f) $\sqrt{6x-1}$

ĐS: a) $x \leq 0$ b) $x \leq 2$ c) $x \leq \frac{2}{3}$ d) $x \geq -\frac{1}{3}$ e) $x \geq \frac{2}{9}$ f) $x \geq \frac{1}{6}$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$

c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$

d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$

f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

ĐS: a) $x > 2$ b) $x \geq 2$ c) $x > 2$ d) $x < \frac{3}{2}$ e) $x > -\frac{3}{2}$ f) $x < -1$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{x^2+1}$

b) $\sqrt{4x^2+3}$

c) $\sqrt{9x^2-6x+1}$

d) $\sqrt{-x^2+2x-1}$

e) $\sqrt{-|x+5|}$

f) $\sqrt{-2x^2-1}$

ĐS: a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x = 1$ e) $x = -5$ f) không có

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{4-x^2}$

b) $\sqrt{x^2-16}$

c) $\sqrt{x^2-3}$

d) $\sqrt{x^2-2x-3}$

e) $\sqrt{x(x+2)}$

f) $\sqrt{x^2-5x+6}$

ĐS: a) $|x| \leq 2$ b) $|x| \geq 4$ c) $|x| \geq \sqrt{3}$ d) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$
e) $x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$ f) $x \leq 2$ hoặc $x \geq 3$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{|x|-1}$

b) $\sqrt{|x-1|-3}$

c) $\sqrt{4-|x|}$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{9-12x+4x^2}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}$

ĐS: a) $|x| \geq 1$ b) $x \leq -2$ hoặc $x \geq 4$ c) $|x| \leq 4$
d) $x \geq 1$ e) $x \neq \frac{3}{2}$ f) $x \geq 1$

C. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA SỐ.

I.1: Loại 1: Dạng chứa căn số học đơn giản.

1. Phương pháp: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

Chú ý: Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Để dàng đặt thừa số chung.

Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Chia hai căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

• Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$

• Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$

2. Ví dụ minh họa:

Bài tập 1: Rút gọn $M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$

Giải

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80} \\ &= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{7^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2 \cdot 5} \\ &= 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

Bài tập 2: Không sử dụng máy tính. Tính giá trị của biểu thức: $A = 2015 + \sqrt{36} - \sqrt{25}$

Giải

Có $A = 2015 + \sqrt{36} - \sqrt{25} = 2015 + 6 - 5 = 2018$

Bài tập 3: Rút gọn biểu thức : $A = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

Giải

$$\begin{aligned} A &= 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18} \\ &= 5 \cdot 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (10 + 5 - 6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Bài tập (có đáp án)

Bài tập 01. Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3})$

Bài tập 02. Rút gọn các biểu thức sau: $A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$

Bài tập 03. Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$

Bài tập 04. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

Bài tập 05.. Rút gọn biểu thức: $B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$

Bài tập 06 .Rút gọn các biểu thức sau: $A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$

Bài tập 07. Rút gọn các biểu thức sau: $A = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

Bài tập 08. Rút gọn biểu thức: $A = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{18}$

Bài tập 09. Rút gọn các biểu thức sau: $A = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$

Bài tập 10. Rút gọn các biểu thức sau : $M = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2}$

Bài tập 11. Rút gọn biểu thức sau $2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4}$

Bài tập 12. Tính $2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{75}$

Bài tập 13. Rút gọn biểu thức: $A = 2\sqrt{3.5^2} - 3.\sqrt{3.2^2} + \sqrt{3.3^2}$

Bài tập 14. Tính: $A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45} - \sqrt{500}$

Bài tập 15. Rút gọn các biểu thức sau : $M = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2}$

Bài tập 16. Rút gọn các biểu thức sau: $A = \sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27}$

Bài tập 17. Rút gọn: $B = \sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5}$

4. Bài tập tự luyện. (không có hướng dẫn)

Bài tập 1: Rút gọn

- | | | | |
|--|-------------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 1. a) $\sqrt{0,09.64}$ | b) $\sqrt{2^4.(-7)^2}$ | c) $\sqrt{12,1.360}$ | d) $\sqrt{2^2.3^4}$ |
| e) $\sqrt{45.80}$ | f) $\sqrt{75.48}$ | g) $\sqrt{90.6,4}$ | h) $\sqrt{2,5.14,4}$ |
| 2. a) $\sqrt{7}.\sqrt{63}$ | b) $\sqrt{2,5}.\sqrt{30}.\sqrt{48}$ | c) $\sqrt{0,4}.\sqrt{6,4}$ | |
| d) $\sqrt{2,7}.\sqrt{5}.\sqrt{1,5}$ | e) $\sqrt{10}.\sqrt{40}$ | f) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$ | |
| g) $\sqrt{52}.\sqrt{13}$ | h) $\sqrt{2}.\sqrt{162}$ | | |
| 3. a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ | b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$ | c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$ | |
| d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ | e) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ | f) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$ | |
| g) $\sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27.256}$ | | | |

4. a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$
 d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$ e) $\sqrt{0,0025}$ f) $\sqrt{3,6.16,9}$
5. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$ c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$
 d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}}$ e) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$ f) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$
6. a) $\sqrt{1\frac{9}{16}.5\frac{4}{9}.0,01}$ b) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$
 c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ d) $\sqrt{1,44.1,21 - 1,44.0,4}$
7. a) $\frac{2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

Bài tập 2: Thực hiện các phép tính sau:

- a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$ b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$
 d) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2}$ f) $\sqrt{(0,1 - \sqrt{0,1})^2}$
- ĐS: a) $-0,1$ b) 8 c) $2 - \sqrt{3}$
 d) $3 - 2\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ f) $\sqrt{0,1} - 0,1$

Bài tập 3: Thực hiện các phép tính sau:

- a) $\sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2}$ b) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})^2}$
 c) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ d) $\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$
 e) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}$ f) $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2}$
- ĐS: a) 6 b) $-4\sqrt{6}$ c) 1 d) 4 e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{2} - 4$

I.2: Loại 2: Dạng “biểu thức số trong căn” tiềm ẩn “là hằng đẳng thức”

1. Phương pháp: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

Chú ý: Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Sử dụng các hằng đẳng thức:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Với $m, n > 0$ thỏa mãn $m + n = A$ và $m \cdot n = B$

$$\text{ta có: } A \pm 2\sqrt{B} = m + n \pm 2\sqrt{m \cdot n} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$$

2. Ví dụ minh họa:

Bài tập 1. a) Rút gọn biểu thức sau: $N = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

b) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } N &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\ &= |\sqrt{5} + 1| - |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} + \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}) \\ &= \frac{1}{2} (|\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1|) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1) = 1 \end{aligned}$$

3. Bài tập (có đáp án)

Bài tập 01. Rút gọn biểu thức sau : $B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

Bài tập 02. Rút gọn biểu thức sau $B = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

Bài tập 03. Rút gọn các biểu thức: $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8}$

Bài tập 04. Tính $B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{3}$

Bài tập 05: Rút gọn biểu thức : $B = 21\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^2 - 6\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2$

Bài tập 06. Rút gọn biểu thức : $B = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

Bài tập 07. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}$ và $B = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

4. Bài tập tự luyện. (không có hướng dẫn giải)

Bài tập 1. Thực hiện các phép tính sau:

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ | b) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ |
| c) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ | d) $\sqrt{24 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ |
| e) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$ | f) $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$ |
| g) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ | h) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ |

ĐS: a) $2\sqrt{2}$ b) $-2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{5} - 4$ g) $\sqrt{2}$ h) $\sqrt{3} - 3$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}$$

Bài tập 2. Thực hiện các phép tính sau:

- $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$
- $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$
- $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$
- $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$
- $\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} + \sqrt{1 - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}}$

I.3: Loại 3: Dạng sử dụng biểu thức liên hợp, trục căn thức, quy đồng...

1. Phương pháp:

- Với $A, B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ + Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$
- Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$
- Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$

2. Ví dụ minh họa:

Bài tập 01. (PP cơ bản: khai phương, rút gọn..)

Rút gọn biểu thức sau $A = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200} \right) : \frac{1}{8}$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200} \right) : \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{10^2 \cdot 2} \right) : \frac{1}{8} \\ &= \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + 8\sqrt{2} \right) \cdot 8 = 2\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 64\sqrt{2} = 54\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài tập 02. (PP quy đồng)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

Giải

$$A = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} + 2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

Bài tập 03. (PP đặt thừa số chung)

Rút gọn biểu thức : $P = (\sqrt{3}-1)\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

Giải

$$P = (\sqrt{3}-1)\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Bài tập 04. (PP liên hợp và đặt thừa số chung):

Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$

Giải

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{2}-1-\sqrt{2} = -1$$

Bài tập 05. (PP liên hợp và hằng đẳng thức trong căn):

Rút gọn biểu thức : $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

Giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+2-2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})}{4-3} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. Bài tập (có đáp án)

Bài tập 01. Rút gọn biểu thức : $P = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - 2\sqrt{5}$

Bài tập 02: Rút gọn biểu thức : $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}}$

Bài tập 03. Rút gọn biểu thức : $P = \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$

Bài tập 04. Rút gọn biểu thức sau $B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Bài tập 05. Tính: $\frac{2}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{18}$

Bài tập 06. Rút gọn biểu thức : $B = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54}$

Bài tập 07: Cho $A = \sqrt{3}-1$; $B = \sqrt{3}+1$. Tính giá trị của biểu thức $A+B$; $A.B$; $\frac{A}{B}$; A^2+B^2

Bài tập 08. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + \frac{3}{\sqrt{3}}$

Bài tập 09. Rút gọn biểu thức : $B = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54}$

Bài tập 10. Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

Bài tập 11. Cho biểu thức : $M = \frac{6}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{75}$. Rút gọn M.

Bài tập 12. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Bài tập 13. Không dùng máy tính, rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) - \frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$

Bài tập 14. Thu gọn biểu thức $A = \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$

Bài tập 16. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$C = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

4. Bài tập tự luyện. (không có hướng dẫn giải)

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$

c) $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

ĐS: a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

d) $1+\sqrt{2}$. Tách $\sqrt{16} = \sqrt{4} + \sqrt{4}$

Bài tập 2: Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{\sqrt{7}-5}{2} - \frac{6-2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7}-2} - \frac{5}{4+\sqrt{7}}$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right) : \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$f) \frac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$ĐS: a) \frac{32\sqrt{7}-20}{9}$$

$$b) \frac{17\sqrt{6}}{6}$$

$$c) \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$d) -3$$

$$e) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f) 1$$

I.4: Loại 4: Chứng minh đẳng thức số.

1. Phương pháp:

Sử dụng các phép biến đổi để biến đổi VT hoặc VP để được đẳng thức bằng nhau.

2. Ví dụ minh họa:

Bài tập 01: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a/ 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$$

$$b/ \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$c/ \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$$

Giải:

a) Biến đổi về trái ta có :

$$VT = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9 = VP$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

$$\begin{aligned} b) \text{ Biến đổi về trái ta có : } VT &= \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} = VP. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

$$c/ \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$$

Biến đổi về trái ta có :

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}} - \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} \\ &= \frac{2}{|2-\sqrt{5}|} - \frac{2}{|2+\sqrt{5}|} = \frac{2}{\sqrt{5}-2} - \frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}+2) - 2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{5}+4 - 2\sqrt{5}+4}{5-4} = 8 = VP \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

3. Bài tập tự luyện (không có hướng dẫn)

Bài tập 01: Chứng minh:

- a) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
- b) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}}=8$
- c) $(\sqrt{2014}-\sqrt{2013}) \cdot (\sqrt{2014}+\sqrt{2013})=1$
- d) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}=9$

Bài tập 02: Chứng minh các số sau đây là số nguyên:

- a) $A = \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}+1}$
- b) $B = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$
- c) $C = \frac{2\sqrt{3+2\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3}-1} - 2\sqrt{3}$

Bài tập 03: Chứng minh rằng:

- a) $9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2$
- b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2$
- c) $23-8\sqrt{7}=(4-\sqrt{7})^2$
- d) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+2\sqrt{2}=3$

Bài tập 04: Chứng minh các đẳng thức sau:

- 1. a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1,5$
- b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$
- c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$$d) \sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$$

$$e) \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2}$$

I.5: Loại 5: Chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp : Với $a \geq 0, b \geq 0$: $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Một số tính chất của bất đẳng thức:

$$1) a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$$

$$2) \left. \begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow a \leq c$$

$$3) a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c \text{ (cộng 2 vế với } c)$$

$$\rightarrow a + c \leq b \Leftrightarrow a \leq b - c \text{ (cộng 2 vế với } -c)$$

$$\rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0 \text{ (cộng 2 vế với } -b)$$

$$\rightarrow a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \text{ (cộng 2 vế với } -b)$$

$$4) \left. \begin{matrix} a \leq b \\ c \leq d \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow a + c \leq b + d$$

$$5) a \leq b \Leftrightarrow a.c \leq b.c \text{ (nếu } c > 0: \text{ giữ nguyên chiều)}$$

$$a \leq b \Leftrightarrow a.c \geq b.c \text{ (nếu } c < 0: \text{ đổi chiều)}$$

$$6) \left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow a.c > b.d$$

$$7) a > b > 0 \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

2. Ví dụ minh họa

Bài tập 1: So sánh a) $\sqrt{17} + \sqrt{26} + 1$ và $\sqrt{99}$

b) $\sqrt{37} - \sqrt{14}$ và $6 - \sqrt{15}$

Giải:

$$a) \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{25} + 1 = 10 \text{ và } 10^2 = 100 > 99 \Rightarrow 10 > \sqrt{99}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > 10 > \sqrt{99} \Leftrightarrow \sqrt{17} + \sqrt{26} + 1 > \sqrt{99}$$

$$b) \text{ Ta có } \sqrt{37} - 6 > 1 \text{ và } 1 > \sqrt{14} - \sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{37} - 6 > \sqrt{14} - \sqrt{15} \Leftrightarrow \sqrt{37} - \sqrt{14} > 6 - \sqrt{15}$$

3. Bài tập tự luyện (không có hướng dẫn)

Bài tập 01: So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|---|
| a) 1 và $\sqrt{2}$ | b) 2 và $\sqrt{3}$ | c) 6 và $\sqrt{41}$ |
| d) 7 và $\sqrt{47}$ | e) 2 và $\sqrt{2} + 1$ | f) 1 và $\sqrt{3} - 1$ |
| g) $2\sqrt{31}$ và 10 | h) $\sqrt{3}$ và -12 | i) -5 và $-\sqrt{29}$ |
| j) $2\sqrt{5}$ và $\sqrt{19}$ | k) $\sqrt{\sqrt{3}}$ và $\sqrt{2}$ | l) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{2}}$ |
| m) $2 + \sqrt{6}$ và 5 | n) $7 - 2\sqrt{2}$ và 4 | o) $\sqrt{15} + \sqrt{8}$ và 7 |

Bài tập 02: So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1 b) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$

Bài tập 03: So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) 9 và $6 + 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3
c) 16 và $9 + 4\sqrt{5}$ d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2

Bài tập 04: So sánh hai số sau (không dùng máy tính):

- a) $3\sqrt{3}$ và $\sqrt{12}$ b) 20 và $3\sqrt{5}$
c) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$
e) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}$ và $\frac{3}{13}$ f) $\sqrt{30} - \sqrt{29}$ và $\sqrt{29} - \sqrt{28}$
g) $\sqrt{2012} + \sqrt{2014}$ và $2\sqrt{2013}$
h) $\sqrt{2014} - \sqrt{2013}$ và $\sqrt{2013} - \sqrt{2012}$

Bài tập 05: Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

- a) $2\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 3\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{6}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$

Bài tập 06: Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh:

- a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ c) $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
d) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ e) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

I.6: Loại 6: Căn bậc ba.

1. Phương pháp

• Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

• Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

• $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ • $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ • Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

Áp dụng: $\sqrt[3]{a^3} = a; \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a$

và các hằng đẳng thức:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

Tính chất:

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\text{Với } b \neq 0, \text{ ta có } \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

2. Bài tập tự luyện (không có hướng dẫn)

Bài tập 01. Tính:

a) $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{-729}$; $\sqrt[3]{0,064}$; $\sqrt[3]{0,216}$; $\sqrt[3]{-0,008}$.

b) $\sqrt[3]{-343}$; $\sqrt[3]{0,027}$; $\sqrt[3]{1,331}$; $\sqrt[3]{-0,512}$; $\sqrt[3]{125}$.

Bài tập 02. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$

b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$

e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$

ĐS: a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}-1$ c) -3 d) $12\sqrt[3]{2}+2$ e) 5 .

Bài tập 03. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

c) $C = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

d) $D = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

ĐS: a) $A=1$. Chú ý: $2 \pm \sqrt{5} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$

b) $B=3$. Chú ý: $9 \pm 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$

c) $C=1$. Chú ý: $26+15\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^3$

d) $D=1$. Đặt $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$, $b = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \Rightarrow a^3 - b^3 = 6, ab = \frac{5}{3}$.

Tính D^3 .

DẠNG 2: CÁC DẠNG TOÁN CĂN CHỨA CHỮ (CHỨA ẨN)

II.1. DẠNG 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

☞ Loại 1: Phương trình trong căn có thể viết dưới dạng bình phương của một biểu thức.

Cách 1: $\sqrt{f(x)^2} = a \Leftrightarrow |f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$ với $a \geq 0; a \in \mathbb{R}$

Cách 2: $\sqrt{f(x)^2} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2$ với $a \geq 0; a \in \mathbb{R}$ với $a \geq 0; a \in \mathbb{R}$

Phương pháp: Để giải dạng phương trình này điều cơ bản là phải viết được biểu thức dưới dấu căn ở dạng bình phương rồi sử dụng ra ngoài dấu căn để trở thành phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối hoặc sử dụng phương pháp bình phương 2 vế của phương trình.

Lưu ý: Nếu $a < 0$ thì phương trình $\sqrt{A^2} = a$ vô nghiệm

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt{4(x-1)^2} = 6$

Giải: $\sqrt{4(x-1)^2} = 6 \Leftrightarrow |2(x-1)| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 6 \\ 2(x-1) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = -2$ là nghiệm của phương trình

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3$

Giải: $\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 9 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Vậy $x = 0; x = 4$ là nghiệm của phương trình.

☞ Loại 2: Phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Phương pháp giải $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Ví dụ minh họa:

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{4 - x}$

Giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 4 = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

Loại 3: Phương trình chứa biểu thức dưới dấu căn không viết được dưới dạng bình phương (trong phương trình chỉ chứa một căn thức)

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad (1) \quad (\text{hoặc dạng } \sqrt{f(x)} = a, \text{ lúc này } g(x) = a = \text{hằng số})$$

Cách giải 1: (Sử dụng phương trình hệ quả)

$$\text{ĐK: } f(x) \geq 0$$

Bình phương hai vế phương trình (1) ta có pt hệ quả: $f(x) = g^2(x)$, giải tìm $x = ?$

Thế vào phương trình (1) xem có thỏa mãn hay không.

Kết luận nghiệm của phương trình (1)

Cách giải 2: (Sử dụng phép biến đổi tương đương)

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} &= g(x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \end{aligned}$$

✓ **Lưu ý:** Khi $g(x) < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

Ví dụ minh họa:

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{4x+1} = 8$

Giải: (HD cách thường dùng)

$$\text{Điều kiện } 4x+1 > 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x+1})^2 = 8^2 \Leftrightarrow |4x+1| = 64 \Leftrightarrow 4x+1 = 64 \Leftrightarrow 4x = 63 \Leftrightarrow x = \frac{63}{4}$$

Kết hợp với điều kiện đầu bài $x \geq \frac{1}{4}$ ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{63}{4}$

Bài 5: a) $\sqrt{2x-4} = 2$ b) $\sqrt{3x-15} = -3$ c) $\sqrt{2x^2+1} = x-1$

Giải:

a) Cách 1: (Sử dụng pt hệ quả)

- ĐK: $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
- Bình phương 2 vế pt đã cho ta được pt: $2x-4 = 4 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$
- Thế $x = 4$ vào pt đã cho thỏa mãn
- Vậy pt có nghiệm $x = 4$

Cách 2: Vì $2 \geq 0$ hiển nhiên đúng nên ta chỉ cần giải như sau:

- $\sqrt{2x-4} = 2 \Leftrightarrow 2x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 4$
- Vậy pt có nghiệm $x=4$.

b) Cách 1: (Sử dụng phương trình hệ quả)

- ĐK: $3x-15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$
- PT(b) $\Leftrightarrow 3x-15=9 \Leftrightarrow 3x=24 \Leftrightarrow x=8$
- Ta thấy $x=8$ thỏa mãn điều kiện nhưng thế vào pt (b) không thỏa mãn
- Vậy pt (b) vô nghiệm.

Cách 2: (Chỉ cần để ý $-3 < 0$) nên pt (b) vô nghiệm.

c) Cách 1: (Sử dụng phương trình hệ quả)

- Ta có: $2x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Bình phương 2 vế pt đã cho ta được pt:

$$2x^2+1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2+1 = x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow x^2+2x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$
- Thế $x=0$ và $x=-2$ vào pt đã cho chỉ có $x=0$ thỏa mãn
- Vậy pt có nghiệm $x=0$.

Cách 2: (Sử dụng phương trình tương đương)

- Ta có:

$$\sqrt{2x^2+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x^2+1 = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2+2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$
- Vậy pt có nghiệm $x=0$.

Đôi lời: Nhược điểm của phương pháp giải theo phương trình hệ quả là dài và phải thử lại nghiệm (tránh trường hợp xuất hiện nghiệm ngoại lai), còn phương pháp giải theo phương trình tương đương có phần ưu điểm là tiện lợi hơn, (không cần phải thử lại nghiệm). nhược điểm của phương pháp giải theo phương trình hệ quả là dài và phải thử lại

Chúng ta cần phân biệt rằng tùy theo đặc thù của phương trình chứa căn mà ta có thể chọn cách giải 1 hoặc 2 cho phù hợp.

Vì vậy sau này chúng ta sẽ tiếp cận nhiều bài toán chứa căn thức thì ta mới cảm nhận được sự sâu sắc trong mọi khía cạnh của bài toán lúc đó ta mới thấy rõ mỗi phương pháp đều có những ý nghĩa đặc sắc riêng của nó.

☞ Loại 4: Phương trình chứa nhiều căn thức, các căn thức có thể đưa về dạng giống nhau.

$$a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(x)} + c\sqrt{f(x)} = d \Leftrightarrow (a+b+c)\sqrt{f(x)} = d \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{d}{a+b+c}$$

$$\text{với } \frac{d}{a+b+c} \geq 0; \frac{d}{a+b+c} \in \mathbb{R}$$

Sau khi rút gọn đưa về giải phương trình **Loại 3** $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Ví dụ minh họa:

Bài 6: Giải phương trình: $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28$

Giải: Điều kiện $x \geq 0$

$$3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 28 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x} - 5 \cdot 2\sqrt{2x} + 7 \cdot 3\sqrt{2x} = 28$$

$$\Leftrightarrow 14\sqrt{2x} = 28$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

(Thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$). Vậy pt có nghiệm là $x=2$.

☞ Loại 5: Phương trình chứa các căn khác nhau, biểu thức trong căn không viết được dưới dạng bình phương.

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k \text{ hoặc } \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

Phương pháp:

$$\text{Với điều kiện } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

Ta thường bình phương 2 vế đưa về **Loại 3** $\sqrt{f(x)} = g(x)$ để giải.

☞ Đối với các phương trình có dạng

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = k \text{ cần biến đổi về dạng } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + k$$

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ cần biến đổi về dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + \sqrt{h(x)}$

(Lí do: Để đảm bảo 2 vế của phương trình đều dương rồi mới đem bình phương)

Ví dụ minh họa:

Bài 7: Giải phương trình: a) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3$ b) $\sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = 1$

Hướng dẫn giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ 3+x+6-x+2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ \sqrt{(3+x)(6-x)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ (3+x)(6-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 6 \\ \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = -3$ và $x = 6$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3+x} - \sqrt{2-x} = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{3+x} = 1 + \sqrt{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ 3+x = 1 + (2-x) + 2\sqrt{2-x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{2-x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$

Loại 6: Quy về phương trình bậc hai bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Phương pháp: Sử dụng các phương pháp biến đổi đưa phương trình về dạng

$f(x) + \sqrt{f(x)} + c = 0$ rồi đặt ẩn phụ $\sqrt{f(x)} = t; t \geq 0$ đưa về giải phương trình bậc hai ẩn t .

Ví dụ minh họa:

Bài 8: Giải phương trình:

$$\text{a) } 2x + 5 - 5\sqrt{2x+1} = 0 \qquad \qquad \text{b) } \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{a) Ta biến đổi } 2x + 5 - 5\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow (2x+1) - 5\sqrt{2x+1} + 4 = 0$$

Đặt : $t = \sqrt{2x+1}$, (đk: $t \geq 0$)

PT(a) trở thành pt: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$

+ Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 1 \Leftrightarrow 2x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

+ Với $t=4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 4 \Leftrightarrow 2x+1=16 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$

Vậy pt đã cho có 2 nghiệm $x=0$; $x=15/2$

b) Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$ (đk $t \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2 - 5}{2}$

PT(1) trở thành: $t + \frac{t^2 - 5}{2} = 5 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \end{cases}$ (l)

Với $t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3 \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = 2$

$(x+1)(4-x) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy pt có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$

Loại 7: Phương trình chứa căn mà biểu thức trong căn ở dạng thương hoặc dạng tích

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \cdot \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

2. Ví dụ minh họa:

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{(2x-8)(4+x)} + 2\sqrt{2x-8} = 0$

Giải: Ta có $\sqrt{(2x-8)(4+x)} + 2\sqrt{2x-8} = 0$

$$\sqrt{(2x-8)(4+x)} + 2\sqrt{2x-8} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-8}(\sqrt{4+x} + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8=0 \\ \sqrt{4+x} + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy pt có nghiệm $x = 4$

Loại 8: Giải các phương trình căn bậc ba

$$\sqrt[3]{f(x)} = a; \sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = a.$$

+ Ở căn bậc lẻ: $\sqrt[2k+1]{f(x)}; \sqrt[2k+1]{g(x)}$ có nghĩa với $\forall x$ nên không cần đặt điều kiện.

+ Ở lũy thừa bậc lẻ: $a = b \Leftrightarrow a^{2n+1} = b^{2n+1}; (n \in \mathbb{N})$ nên không cần xét đến dấu của hai vế.

Phương pháp: Lập phương hai vế theo công thức

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$ và biến đổi linh hoạt đưa về dạng $AB = 0$ để giải toán

Ví dụ minh họa:

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$ (*)

+ Ở phương trình (*) học sinh cũng nhận xét có chứa căn bậc 3 nên nghĩ đến việc lập phương hai vế:

Giải:

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Lập phương hai vế

$$(*) \Leftrightarrow x+1+7-x+3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{7-x}+3\sqrt{x+1} \cdot\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2=8$$

$$\Leftrightarrow x+1+7-x+3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)} \cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}\right)=8 \quad (1)$$

thay $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$ vào phương trình (*) ta được:

$$8+3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)} \cdot 2=8 \Leftrightarrow (x+1)(7-x)=0 \quad (2)$$

Giải ra: $x_1 = -1; x_2 = 7$; thay lại vào phương trình (*) ta thấy nghiệm đúng, nên đó là 2 nghiệm của phương trình ban đầu. Vậy (*) có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 7$.

Chú ý: Do từ (1) suy ra (2) ta thực hiện phép biến đổi không tương đương, vì nó chỉ tương đương khi x thỏa mãn: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$. Vì vậy việc thay lại nghiệm của (1) vào phương trình đã cho là cần thiết. Nếu không thử lại có thể sẽ có nghiệm ngoại lai.

Bài tập tự luyện (Không có hướng dẫn)

Bài tập 1: Giải phương trình:

a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$

b) $\sqrt{x^4} = 7$

c) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$

d) $\sqrt{x^2} = 7$

e) $\sqrt{x^2} = |-8|$

f) $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5$

g) $\sqrt{x^4} = 9$

h) $\sqrt{(x+2)^2} = 2x+1$

i) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$

j) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = x - 3$

k) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

l) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \sqrt{9x^2 - 24x + 16}$

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x} = -1,5$ b) $\sqrt[3]{x-5} = 0,9$

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} + 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$ b) $\frac{3\sqrt{x}+1}{7\sqrt{x}-5} = \frac{8}{15}$
 c) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$ d) $\sqrt{2-x} + \sqrt{8-4x} = 3$

II.2 DẠNG TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

Lí thuyết:

Cho $x \geq 0, y \geq 0$. Ta có các công thức biến đổi sau:

1. $x = (\sqrt{x})^2$; $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$
2. $x \pm \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} \pm 1)$
3. $x\sqrt{y} \pm y\sqrt{x} = \sqrt{xy}(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$
4. $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$
5. $x \pm 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$
6. $x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 \pm (\sqrt{y})^3 = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(x \mp \sqrt{xy} + y)$

Loại 1: Sử dụng các Hằng đẳng thức

1. Ví dụ minh họa

Bài 1: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2$ (với $a \geq 0; a \neq 1$)

Giải:

Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+\sqrt{a^2})}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\right)^2 \\ &= (1+\sqrt{a})^2 \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = 1 \end{aligned}$$

2. Bài tập (có hướng dẫn giải)

Bài tập 01. Rút gọn biểu thức $M = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$ với $ab \neq 0$

Bài tập 02. Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-2} + 1 + \sqrt{x-2}$ với $2 \leq x < 3$

Bài tập 03. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Bài tập 04: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \neq 1; x \geq 0$). Rút gọn A.

Bài tập 05. Cho biểu thức: $D = \sqrt{(1-\sqrt{x})^2} \cdot \sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$

Bài tập 06: Rút gọn biểu thức $Q = (\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1})(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x})$ (với $x > 0; x \neq 1$)

Loại 2: Sử dụng phương pháp quy đồng:

1. Ví dụ minh họa:

Bài 1. Rút gọn biểu thức : $B = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

Giải

$$B = \frac{(1-x) - (1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

2. Bài tập (có hướng dẫn giải)

Bài tập 01. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Bài tập 02. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Bài tập 03. Cho biểu thức $G = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$. Tìm x để G có nghĩa và rút gọn G.

Bài tập 04. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Bài tập 05. Rút gọn biểu thức $A = (\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2}) : \frac{x+4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Bài tập 06. Rút gọn biểu thức $B = (\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

Bài tập 07. Rút gọn biểu thức: $P = (\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1}) : \frac{a+1}{a-1}$

Bài tập 08: Rút gọn các biểu thức sau: $B = (\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}) \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$

Bài tập 09: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$ (với $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ và $a \neq 1$).

Bài tập 10. Rút gọn biểu thức : $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 1$)

Bài tập 11. Rút gọn các biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+4} + \frac{1}{\sqrt{x}-4} \right) \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$

Bài tập 12. Rút gọn các biểu thức: $Q = \left(1 + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Bài tập 13. Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x\sqrt{x} + x)$ với $x > 0$

Bài tập 14. Rút gọn $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$ Với $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ ($x \geq 0; x \neq 4$)

Bài tập 16. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Bài tập 17. Rút gọn $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

Bài tập 18. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$.

Bài tập 19. Rút gọn các biểu thức sau: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{3\sqrt{a}}{a-4}$ ($a > 0; a \neq 4$)

Bài tập 20. Rút gọn biểu thức

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4)$$

Loại 3: Làm xuất hiện nhân tử chung rồi đơn giản biểu thức chứa căn sau đó quy đồng.

Ví dụ minh họa:

Bài 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x} + x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$ với $x > 0, x \neq 2$

Giải:

Với điều kiện đã cho thì

$$P = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = 1$$

2. Bài tập (có hướng dẫn giải)

Bài tập 01. Chứng minh rằng: $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x - y$; với $x > 0; y > 0$ và $x \neq y$

Bài tập 02. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với a, b , là số dương.

Bài tập 03. Rút gọn biểu thức $A = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(3 - \frac{a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 5}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 25$

Bài tập 04. Rút gọn biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$, với $a \geq 0; a \neq 1$

Bài tập 05. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$ với $a \geq 0; a \neq 1$

Bài tập 06. Rút gọn biểu thức: $M = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$ với $a \geq 0; a \neq 1$

Bài tập 07. Rút gọn các biểu thức sau (trình bày rõ các bước biến đổi):

Bài tập 08. Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức P.

Bài tập 09. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x - 1}\right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức A

Bài tập 10. Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{4}{x - 4}$. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P.

Bài tập 11. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right)(\sqrt{x}-3)$. Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

Bài tập 12. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-4}\right) \cdot \left(\sqrt{x}-1 + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}}\right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 4$).

Chứng minh rằng $P = \sqrt{x} + 3$

Bài tập 13. Chứng minh rằng với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Bài tập 14. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{x-\sqrt{x}}$ Với $x > 0$; $x \neq 1$.

Bài tập 15. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{x-\sqrt{x}}$ Với $x > 0$; $x \neq 1$.

Bài tập 16. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và x khác 1

Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Bài tập 17. Cho biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0$, $x \neq 4$. Rút gọn biểu thức Q.

Bài tập 18. Với $x > 0$, cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$. Rút gọn biểu thức B.

Bài tập 19: Rút gọn các biểu thức

$$a) P = (\sqrt{3}-1) \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$b) Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \text{ khác } 4$$

Bài tập 20. Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-12}{6\sqrt{x}-36} + \frac{6}{x-6\sqrt{x}}$ ($x > 0$ và $x \neq 36$)

Bài tập 21. Rút gọn: $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}}\right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

Bài tập 22. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}}\right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0$; $x \neq 4$.

Bài tập 23. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$ và x khác 1.

Bài tập 24. Cho biểu thức: $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$. Rút gọn biểu thức P.

Bài tập 25. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$)

Rút gọn biểu thức A

Bài tập 26. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$. Rút gọn A.

Bài tập 27. Cho biểu thức $P = \frac{4}{\sqrt{a}-1} + \frac{3}{\sqrt{a}+1} - \frac{6\sqrt{a}+2}{a-1}$ (với $a \geq 0$ và $a \neq 1$). Rút gọn P

Bài tập 28. Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$$

$$B = 21(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 - 6(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15}$$

Bài tập 29. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 1, x \neq 1$.

Bài tập 30. Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-10}{x-4} \quad (x \geq 0, x \neq 4)$$

Bài tập 31. Cho $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$

Bài tập 32. Cho $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}} \right]$ ($a > 0, a \neq 1$). Rút gọn P

Bài tập 33. Rút gọn biểu thức P

$$P = \left[\frac{-x}{\sqrt{x}(x-9)} + \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right] : \left(\sqrt{x}+3 - \frac{x}{\sqrt{x}-3} \right) \text{ với } x > 0; x \neq 9$$

Bài tập 34. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0; a \neq 4$

II. 3. DẠNG TOÁN CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ

Sau khi rút gọn bài toán chứa căn xong chúng ta thường gặp các ý phụ. Các bài toán ý phụ của bài toán chứa căn gồm:

Bài toán 1: Tìm ẩn để biểu thức thỏa mãn một điều kiện cho trước. (lớn hơn, nhỏ hơn, bằng một giá trị cho trước)

Cho biểu thức rút gọn thỏa điều kiện được phương trình hoặc bất phương trình. Sau đó ta đi giải phương trình hoặc bất phương trình đó. (Xem Dạng 1 – Loại 1)

Bài toán 2. Tính giá trị của biểu thức tại giá trị cho trước.

Thay giá trị cho trước của ẩn vào biểu thức đã được rút gọn rồi tính.

Bài toán 3: Tìm a nguyên để biểu thức nguyên.

* Hay dùng: Lấy tử chia cho mẫu tách biểu thức thành tổng của một số nguyên và một biểu thức có tử là một số nguyên

Cho mẫu là ước của tử suy ra ẩn.

Các phương pháp cụ thể:

1. Tách phần nguyên: $\frac{A}{B} = C + \frac{k}{B}$

Khi k là một hằng số; B là biểu thức nguyên của biến. Khi đó $\frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow B$ nhận giá trị là ước nguyên của k. Vì vậy ta cần tìm các ước k_i của k và giải các phương trình $B = k_i$ rồi tìm các giá trị nguyên của biến.

Ví dụ: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $\frac{2x-5}{x-1}$ nhận giá trị nguyên?

Giải: Ta có $A = \frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$.

Khi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x-1 \in \mathbb{Z}$, vậy $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-1}$ nhận giá trị nguyên

$\Leftrightarrow x-1$ nhận giá trị là ước nguyên của 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=4 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } x \in \mathbb{Z})$$

Vậy với $x \in \{2, 0, 4, -2\}$ thì biểu thức nhận giá trị nguyên.

2. Khi phần dư không chỉ là một hằng số, mà phần dư là một biểu thức của biến, bậc nhỏ hơn bậc của B?

Khi đó ta viết $\frac{A}{B} = C + \frac{K}{B}$. Khi đó sử dụng tính chất chia hết của số nguyên để giải. **Khi giải xong bắt buộc phải có bước thử lại.**

Ví dụ: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $\frac{x-1}{2x^2+1}$ nhận giá trị nguyên

$$\begin{aligned} \text{Giải:} \quad & \text{Giả sử tồn tại } x \in \mathbb{Z} \text{ để } (x-1) : (2x^2+1) \\ & \Rightarrow (x^2-1) : (2x^2+1) \\ & \Rightarrow (2x^2+1-3) : (2x^2+1) \\ & \Leftrightarrow -3 : (2x^2+1) \\ & \Leftrightarrow 2x^2+1 \in \{1, 3\} \\ & \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại: với $x = -1$ thì biểu thức nhận giá trị $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại)

với $x = 0$ thì biểu thức nhận giá trị $-1 \in \mathbb{Z}$

với $x = 1$ thì biểu thức nhận giá trị $0 \in \mathbb{Z}$

Vậy với $x = 0; 1$ thì biểu thức nhận giá trị nguyên.

3. Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)

Ví dụ: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $A = \frac{x^4 + x^3 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}$ nhận giá trị nguyên.

Giải:

$$\text{Ta có: } A = x^2 - 1 + \frac{2x}{x^2 + x + 1}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 - 1 \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$ nhận giá trị nguyên.

Giả sử y_0 là 1 giá trị của biểu thức. Khi đó tồn tại x để $y_0 = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

$\Leftrightarrow$ phương trình: $2x = y_0(x^2 + x + 1)$ có nghiệm x.

$$\Leftrightarrow y_0 x^2 + (y_0 - 2)x + y_0 = 0 \quad (1) \text{ có nghiệm}$$

+) Xét $y_0 = 0$ phương trình có nghiệm $x = 0$

+) Xét $y_0 \neq 0$ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (y_0 - 2)^2 - 4y_0 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2 \leq y_0 \leq \frac{2}{3} \quad (y_0 \neq 0)$$

Do đó điều kiện để phương trình có nghiệm là $-2 \leq y_0 \leq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Những giá trị nguyên của y có thể đạt được là $y \in \{-2; -1; 0\}$

+) Với $y = -2$ ta có phương trình: $2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in \mathbb{Z}$

+) Với $y = -1$ ta có phương trình: $x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$ không chính phương $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x \notin \mathbb{Z}$ (loại)

+) Với $y = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = -1$ thì biểu thức A nhận giá trị nguyên.

4. Sử dụng miền giá trị của biểu thức

Ví dụ: Tìm x để $C = \frac{x-3}{x+1}$ ($x \geq 0$) đạt giá trị nguyên

Giải:

Ta có $C = 1 - \frac{4}{x+1}$ nhận giá trị nguyên khi $\frac{4}{x+1}$ nhận giá trị nguyên. Mà $x \geq 0$ nên

$0 < \frac{4}{x+1} \leq 4$. Vậy các giá trị nguyên có thể có của $\frac{4}{x+1}$ là 1, 2, 3, 4

$$*) \frac{4}{x+1} = 1 \Rightarrow x = 3 \text{ khi đó } C = 0$$

$$*) \frac{4}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ khi đó } C = -1$$

$$*) \frac{4}{x+1} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ khi đó } C = -2$$

$$*) \frac{4}{x+1} = 4 \Rightarrow x = 0 \text{ khi đó } C = -3$$

Vậy các giá trị nguyên của C là 0, -1, -2, -3 tại giá trị tương ứng của x là 3, 1, $\frac{1}{3}$, 0

(Lưu ý: Ở đây học sinh có thể nhầm là $x+1$ là ước của 4. Nhưng do $x \in \mathbb{R}$ nên $x+1$ có thể ra là một số không nguyên, tức không phải là ước của 4. Thông thường ta phân cách làm như sau: **Cách sử dụng Ước khi đề bài có tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$. Cách sử dụng miền giá trị khi đề cho là tìm x để $A \in \mathbb{Z}$)**

Bài toán 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

-Hay dùng: Biến đổi biểu thức về dạng $A^2 + m$ hoặc $-A^2 + m$

Các phương pháp cụ thể

1. Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ để biến đổi biểu thức về dạng:

* $A = a + [f(x)]^2 \geq a$ suy ra $\min A = a$ khi $f(x) = 0$

* $B = b - [f(x)]^2 \leq b$ suy ra $\max B = b$ khi $f(x) = 0$

2. Áp dụng tính chất: $|x| + |y| \geq |x + y|$ để tìm GTNN

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $x, y \geq 0$

3. Áp dụng tính chất: $|x| - |y| \leq |x - y|$ để tìm GTLN

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $x \geq y \geq 0$ hoặc $x \leq y \leq 0$

4. Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}$ ($a \geq b \geq 0$) để tìm GTLN.

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $b(a - b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $a = b$

5. Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$ ($a, b \geq 0$) để tìm GTNN

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $a, b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$

6. Áp dụng bất đẳng thức CôSi:

+ Với $a \geq 0, b \geq 0$ thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $a = b$

+ Với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$ thì $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n}$ (2)

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

Từ đẳng thức (1) ta suy ra:

- Nếu $a \cdot b = k$ (không đổi) thì $\min(a + b) = 2\sqrt{k} \Leftrightarrow a = b$

- Nếu $a + b = k$ (không đổi) thì $\max(a \cdot b) = \frac{k^2}{4} \Leftrightarrow a = b$

Từ đẳng thức (2) ta suy ra:

- Nếu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n = k$ (không đổi) thì $\min(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = n\sqrt[n]{k}$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = k$ (không đổi) thì $\max(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

7. Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta \geq 0$ ($\Delta' \geq 0$)

Dấu ‘ = ‘ xảy ra khi phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ ($x = -\frac{b'}{a}$)

CÔNG THỨC NÂNG CAO THỰC HIỆN TRONG BIẾN ĐỔI CĂN THỨC:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (A > 0, B > 0, A^2 > B)$$

1. Ví dụ minh họa

Bài tập 01: Đề thi Tuyển Sinh vào 10 năm 2018 – 2019 Hà Nội

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$ (loại bài toán 2)

b) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$ (loại bài toán 1)

Giải

a) Do $x = 9$ thỏa mãn điều kiện nên thay $x = 9$ vào A ta có

$$A = \frac{\sqrt{9} + 4}{\sqrt{9} - 1} = \frac{3 + 4}{3 - 1} = \frac{7}{2}.$$

$$b) B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 1 - 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$c) \frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1} : \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \geq \frac{x}{4} + 5$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x} + 4) \geq x + 20 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$x = 4$ thỏa mãn điều kiện. Vậy $x = 4$ thì $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$

Bài tập 02: Đề thi Tuyển Sinh vào 10 năm 2018 – 2019 Hà Nam

a) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{8} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

b) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$. Rút gọn B. Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên. (bài toán 3)

Giải:

a) Rút gọn $A = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{8} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2}}{2} + \sqrt{6 \cdot 3} = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

b) $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \\ &= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9} \end{aligned}$$

Để $B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11:(a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in U(11)$. $U(11) = \{1; 11; -1; -11\}$

Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thỏa mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in \mathbb{Z}$

Bài tập 03: Đề thi Tuyển Sinh chuyên chung vào 10 năm 2018 – 2019 Thái Bình

Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2} + 1 \right) : \frac{1}{2x-3\sqrt{x}+1} \quad \left(\text{với } x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1; x \neq 4 \right)$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x sao cho $P = 2019$. (loại bài toán 1)

c) Với $x \geq 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của $T = P + \frac{10}{x}$. (loại bài toán 4)

Giải:

$$a) P = \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} + 1 \right) \cdot (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)$$

$$P = 4x - 1$$

$$b) P = 2019 \Leftrightarrow 4x - 1 = 2019$$

$$x = 505$$

$$c) T = P + \frac{10}{x} = 4x + \frac{10}{x} - 1 = \left(\frac{10}{x} + \frac{2x}{5} \right) + \frac{18x}{5} - 1$$

$$T = \left(\frac{10}{x} + \frac{2x}{5} \right) + \frac{18x}{5} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{10}{x} \cdot \frac{2x}{5}} + \frac{18}{5} \cdot 5 - 1 = 21 \quad (\text{Do } x \geq 5 \text{ và cösi})$$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 21 khi $x = 5$.

2. PHẦN BÀI TẬP (Có hướng dẫn giải)

Bài 1: Tuyển sinh Hà Nam năm 15-16

$$\text{Cho biểu thức } B = \frac{x-\sqrt{x}}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}} - 1 \quad (\text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4).$$

Rút gọn B và tìm x để $B = 1$.

Bài 2: Tuyển sinh Hà Nam năm 16-17.

$$\text{Rút gọn: } \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-4} \quad \text{với } 0 < x \neq 4$$

Bài 3: Tuyển sinh chuyên Hà Nam năm 14-15

$$\text{Cho biểu thức } P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$$

(với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$)

a) Rút gọn biểu thức P .

$$b) \text{ Tính giá trị biểu thức } P \text{ khi } x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$$

Bài 4: Tuyển sinh chuyên chung Hà Nam năm 15-16

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$ (với $a > 0$ và $a \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$

Bài 5: Tuyển sinh Hà Nội năm 13-14

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$

Bài 6: Tuyển sinh Lào Cai năm 13-14

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$ Với $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$

a) Rút gọn P

b) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$

Bài 7: Tuyển sinh Nam Định năm 13-14

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$ và x khác 1.

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên.

Bài 8: Tuyển sinh Hà Nội năm 14-15

1) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x=9$

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và x khác 1

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x}+5$

Bài 9: Tuyển sinh Nghệ An năm 14-15

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A < 0$.

Bài 10: Tuyển sinh Thái Bình năm 14-15

Cho biểu thức A:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4)$$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 11: Tuyển sinh Thanh Hoá năm 14-15

Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$

1. Rút gọn A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 12: Tuyển sinh Khánh Hoà năm 15-16

Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{y}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.
- b) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1-\sqrt{3})^2; y = 3-\sqrt{8}$

Bài 13: Tuyển sinh Quảng Bình năm 15-16

Cho biểu thức $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm x khi $A = \frac{4}{2015}$

Bài 14: Tuyển sinh Thái Bình năm 15-16

Cho biểu thức: $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Rút gọn biểu thức P.

Tìm giá trị của P khi $x = 9 + 4\sqrt{5}$

Bài 15: Tuyển sinh Nam Định năm 16-17

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-4} \right) \cdot \left(\sqrt{x}-1 + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 4$).

- 1) Chứng minh rằng $P = \sqrt{x} + 3$
- 2) Tìm các giá trị của x sao cho $P = x + 3$

Bài 16: Tuyển sinh Thanh Hoá năm 16-17

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$)

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tìm các số nguyên x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Bài 17: Tuyển sinh Chuyên Sơn La năm 16-17

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1}$ ($x > 0; x \neq 1$)

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.

Bài 18: Tuyển sinh Lam Sơn – Thanh Hoá năm 14-15

Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ (Với $x > 0$)

1. Rút gọn biểu thức P
2. Tính giá trị của biểu thức khi $x = 2\sqrt{2} + 3$

Bài 19: Tuyển sinh Bắc Giang năm 15-16

Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} - 11}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa, khi đó rút gọn A
- b) Tìm số chính phương x sao cho A có giá trị là số nguyên

Bài 20: Tuyển sinh Chuyên Hà Nam năm 09-10

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 - x} + \frac{(\sqrt{x} - 2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
- b) Rút gọn P
- c) Tìm x để $P > 0$

Bài 21: Tuyển sinh Ninh Thuận năm 15-16

Cho biểu thức: $P = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tính giá trị P khi $x = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$

Bài 22: Tuyển sinh Hà Nội năm 16-17

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x} + 8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2\sqrt{x} - 24}{x - 9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3}$
- 3) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên

99 BÀI TOÁN TỔNG HỢP – TỰ GIẢI. (Sưu tầm)

1.1 Rút gọn biểu thức:

a) $A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right)$, với $a > 0, a \neq 4$

TS lớp 10 TPHCM 06 - 07

ĐS: $A = -2; B = -8$

1.2 Rút gọn biểu thức:

a) $A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \right) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2})$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{a + 1} \right)^2$, với $a > 0, a \neq 1$

TS lớp 10 chuyên TPHCM 06 - 07

ĐS: $A = 8; B = \frac{2(a-1)}{a+1}$

1.3 Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 4} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 4$

TS lớp 10 TPHCM 08 - 09

ĐS: $A = -2\sqrt{3}; B = 6$

1.4 Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$, với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của P khi $x = 4$.

c) Tìm x để $P = \frac{13}{3}$.

TS lớp 10 Hà Nội 08 - 09 ĐS: a) $P = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $P = 7/2$; c) $x = \frac{1}{9}; x = 9$

1.5 a) Trục căn thức ở mẫu: $\frac{5}{\sqrt{5}}$ và $\frac{5}{2 + \sqrt{3}}$

b) Rút gọn: $A = \frac{\sqrt{ab} - 2\sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a \geq 0, b > 0$

TS lớp 10 Đà Nẵng 08 - 09

ĐS: a) $\sqrt{5}; 10 - 5\sqrt{3}$ b) $A = -2$

1.6 Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3} + 1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 4}{5 - 2\sqrt{3}}}$

b) $B = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$, với $x \geq 0, x \neq 16$

TS lớp 10 TPHCM 11 - 12

ĐS: $A = \sqrt{6}$; $B = \sqrt{x} - 1$

1.7 a) Thực hiện phép tính: $(\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}) : \sqrt{3}$

b) Trục căn thức ở mẫu: $\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1}$

TS lớp 10 An Giang 11 - 12

ĐS: $A = 1$; $B = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

1.8 a) Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{144} : \sqrt{36}$

b) Rút gọn: $B = \left(\frac{a + 3\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3} - 2 \right) \cdot \left(\frac{a - 1}{\sqrt{a} - 1} + 1 \right)$, với $a \geq 0, a \neq 1$

TS lớp 10 Bắc Giang 11 - 12

ĐS: $A = 7$; $B = a - 4$

1.9 Thực hiện phép tính: $P = \sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}}$

TS lớp 10 Bến Tre 11 - 12

ĐS: $P = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

1.10 Rút gọn biểu thức:

a) $A = (\sqrt{32} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{2}$

b) $B = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{6 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

TS lớp 10 Bình Thuận 11 - 12

ĐS: $A = 13$; $B = -\sqrt{3}$

1.11 Tính: $M = \sqrt{15x^2 - 8x\sqrt{15} + 16}$, tại $x = \sqrt{15}$

TS lớp 10 Bình Dương 11 - 12

ĐS: $M = 11$

1.12 Cho biểu thức: $A = \frac{x + 1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$, với $x \geq 0$.

a) Tìm x để A có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Với giá trị của x thì $A < 1$.

TS lớp 10 Cần Thơ 11 - 12 ĐS: a) $x \geq 0, x \neq 1$; b) $A = 2\sqrt{x} - 1$; c) $0 \leq x < 1$

1.13 a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$

b) Cho: $B = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{x - 1} \right)$, với $x > 0, x \neq 1$

i) Rút gọn biểu thức B.

ii) Tìm giá trị của x để biểu thức $B = 3$.

TS lớp 10 Đắk Lắk 11 - 12

ĐS: a) $A = 1$ b) i) $B = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ii) $x = \frac{9}{4}$

1.14 a) Tính giá trị các biểu thức:

i) $A = \sqrt{25} - \sqrt{16} + \sqrt{9}$ ii) $B = \sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{5}) + \sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

b) Rút gọn biểu thức: $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 4$

TS lớp 10 Đồng Tháp 11 - 12

ĐS: a) $C = 2$

1.15 Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 25$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A khi $x = 9$.

c) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

TS lớp 10 Hà Nội 11 - 12 ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$; b) $A = -\frac{1}{4}$; c) $0 \leq x < 100$

1.16 Rút gọn: $Q = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \right) : \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

TS lớp 10 Đà Nẵng 11 - 12

ĐS: $Q = 1$

1.17 Cho $P = \frac{x-7}{x-3\sqrt{x}} - \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, với $x > 0$ và $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức $Q = P : \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x = \frac{2}{10-3\sqrt{11}}$.

TS lớp 10 Hà Nam 11 - 12

ĐS: a) $P = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$ b) $Q = \sqrt{11}-3$

1.18 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{3} \left(2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \frac{3}{2}\sqrt{12} \right)$

b) $B = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}-1}$

TS lớp 10 Hải Phòng 11 - 12

ĐS: a) 12 b) $\sqrt{2}$

1.19 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{3}$

b) $B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{24}$

TS lớp 10 Thừa Thiên Huế 11 - 12

ĐS: a) 2 b) 6

1.20 Rút gọn các biểu thức: TS lớp 10 Hải Phòng 11 - 12

a) $A = \sqrt{3} \left(2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \frac{3}{2}\sqrt{12} \right)$

b) $B = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}-1}$

ĐS: a) $A = 12$ b) $B = \sqrt{2}$

1.21 Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$

TS lớp 10 Khánh Hòa 11 - 12

ĐS: $A = 2$

1.22 Cho $P = \frac{x^2+2}{1-x^3} - \frac{1}{2(1+\sqrt{x})} - \frac{1}{2(1-\sqrt{x})}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị nguyên của x để biểu thức $Q = \frac{1}{(x-1)P}$ có giá trị nguyên.

TS lớp 10 Kon Tum 11 - 12 ĐS: a) $P = \frac{1}{1+x+x^2}$ b) $x = 0; x = 2; x = 4$

1.23 a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{3}$

b) Trục căn ở mẫu số rồi rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{24}$

TS lớp 10 Huế 11 - 12

ĐS: a) $A = 2$ b) $B = 6$

1.24 a) Tính giá trị của các biểu thức $A = \sqrt{25} + \sqrt{9}$; $B = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} - \sqrt{5}$.

b) Cho $P = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} : \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ($x > 0; y > 0; x \neq y$)

i) Rút gọn P.

ii) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 2012$ và $y = 2011$.

TS lớp 10 Lạng Sơn 11 - 12 ĐS: a) $A = 8; B = -1$ b) i) $P = x - y$ ii) $P = 1$

1.25 Cho $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$. TS lớp 10 Nghệ An 11 - 12

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A - 9\sqrt{x}$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ b) $x = 9/4$ c) GTLN $P = 1$ khi $x = 1/97$

1.26 Rút gọn các biểu thức sau:.

a) $A = \sqrt{2} + \sqrt{8}$

b) $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$ ($a > 0, b > 0, a \neq b$).

TS lớp 10 Ninh Bình 11 - 12

ĐS: a) $A = 3\sqrt{2}$ b) $B = a - b$

1.27 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

b) $B = (10 - 3\sqrt{11})(3\sqrt{11} + 10)$

TS lớp 10 Kiên Giang 11 - 12

ĐS: a) $A = \sqrt{3}$ b) $B = 1$

1.28 Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x} - 8}{x + 2\sqrt{x} + 4} + 3(1 - \sqrt{x})$ ($x \geq 0$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của x để biểu thức $Q = \frac{2P}{1-P}$ nhận giá trị nguyên.

TS lớp 10 Ninh Thuận 11 - 12

ĐS: a) $A = 1 - 2\sqrt{x}$ b) $x = 1$

1.29 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$

TS lớp 10 Phú Yên 11 - 12

ĐS: a) $A = 2$ b) $B = 1$

1.30 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + \sqrt{500}$

b) $B = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2}$

TS lớp 10 Quảng Nam 11 - 12

ĐS: a) $A = \sqrt{5}$ b) $B = -\sqrt{2}$

1.31 a) Thực hiện phép tính: $A = 2\sqrt{9} + 3\sqrt{16}$.

b) Rút gọn biểu thức: $M = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}$ ($x > 0, x \neq 1$)

TS lớp 10 Quảng Ngãi 11 - 12

ĐS: a) $A = 18$ b) $M = \sqrt{x} - 1$

1.32 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - 1$

b) $B = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 5\sqrt{3}$

TS lớp 10 Quảng Ninh 11 - 12

ĐS: a) $A = \sqrt{2}$ b) $B = 3\sqrt{3}$

1.33 Rút gọn các biểu thức sau (không sử dụng máy tính cầm tay).

a) $M = \sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{3}$

b) $N = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a} - 2} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a - 4}$ ($a > 0, a \neq 4$)

TS lớp 10 Quảng Trị 11 - 12

ĐS: a) $A = 11\sqrt{3}$ b) $N = 2$

1.34 Cho biểu thức: $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

TS lớp 10 Thái Bình 11 - 12 $\underline{DS}: a) A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad b) A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.35 a) Đơn giản biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

b) Cho biểu thức: $P = a - \left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \right)$, với $a \geq 1$

i) Rút gọn P

ii) Chứng tỏ $P \geq 0$.

TS lớp 10 Khánh Hòa 12 - 13 $\underline{DS}: a) A = 1 + \sqrt{2} \quad b) P = a - 2\sqrt{a-1}$

1.36 a) Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$.

b) Rút gọn: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-2} - \frac{2}{a-2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a-3\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} + 1 \right)$ ($a > 0, a \neq 4$)

TS lớp 10 An Giang 12 - 13 $\underline{DS}: a) A = 1 \quad b) B = 1$

1.37 a) Tìm x để giá trị các biểu thức sau có nghĩa:

i) $\sqrt{3x-2}$

ii) $\frac{4}{\sqrt{2x-1}}$

b) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

TS lớp 10 Bắc Ninh 12 - 13 $\underline{DS}: a) x \geq 2/3, x > 1/2 \quad b) A = 1$

1.38 a) Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

b) Rút gọn: $B = \frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2} + \frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} - \frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4}$ ($a \geq 0, a \neq 4$)

TS lớp 10 Bình Định 12 - 13 $\underline{DS}: A = 3, B = 4 - a$

1.39 Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x + \sqrt{x})$ với $x \geq 0$.

TS lớp 10 Đắk Lắk 12 - 13 $\underline{DS}: A = x$

1.40 Cho biểu thức: $A = \frac{2}{5}\sqrt{50x} - \frac{3}{4}\sqrt{8x}$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của x khi $A = 1$.

TS lớp 10 Bình Dương 12 - 13 $\underline{DS}: a) A = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad b) x = 2$

1.41 a) Tính giá trị của các biểu thức sau:

i) $A = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ ii) $B = \sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) Rút gọn: $M = \left(1 + \frac{x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right) \left(1 + \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right)$ ($0 \leq x \neq 1$)

TS lớp 10 Bình Phước 12 - 13 ĐS: a) $A = \sqrt{5}$, $B = -1$, $M = 1 - x$

1.42 Rút gọn các biểu thức sau (không sử dụng máy tính cầm tay).

a) $P = \sqrt{50} - 6\sqrt{8} + \sqrt{32}$.

b) $Q = \frac{2}{2x-1} \sqrt{8x^2(1-4x+4x^2)}$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

TS lớp 10 Bình Thuận 12 - 13 ĐS: a) $P = -3\sqrt{2}$ b) $Q = \pm 4x\sqrt{2}$

1.43 Cho biểu thức: $K = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a} \right)$ với $a > 0$ và $a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức K.

b) Tìm a để $K = \sqrt{2012}$.

TS lớp 10 Cần Thơ 12 - 13 ĐS: a) $K = 2\sqrt{a}$ b) $a = 503$

1.44 Rút gọn các biểu thức:

a) $M = \frac{\sqrt{12}+3}{\sqrt{3}}$

b) $N = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

TS lớp 10 Đồng Nai 12 - 13 ĐS: $M = \sqrt{3}+2$, $N = \sqrt{2}-1$

1.45 Rút gọn các biểu thức:

a) $A = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{45} - \sqrt{500}$

b) $B = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{8}$

TS lớp 10 Hà Nam 12 - 13 ĐS: $A = \sqrt{5}$, $B = -\sqrt{2}$

1.46 a) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi $x = 36$.

b) Rút gọn: $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 16$

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

TS lớp 10 Hà Nội 12 - 13 ĐS: a) $A = \frac{5}{4}$ b) $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$ c) $\in \{14; 15; 17; 18\}$

1.47 a) Tìm các số là căn bậc hai của 36.

b) Cho $A = 3 - 2\sqrt{5}$, $B = 3 + 2\sqrt{5}$. Tính $A + B$.

c) Rút gọn: $C = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{4}{x-9} : \frac{1}{\sqrt{x}+3}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

TS lớp 10 Đồng Tháp 12 - 13

ĐS: c) $C = 1$

1.48 a) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $A = \frac{5}{\sqrt{6}-1}$.

b) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4a}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$

i) Rút gọn biểu thức P.

ii) Với những giá trị nào của a thì $P = 3$.

TS lớp 10 Hà Tĩnh 12 - 13 ĐS: a) $A = \sqrt{6} + 1$ b) i) $P = \frac{4a-1}{a^2}$ ii) $a = \frac{1}{3}$

1.49 Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ với a và b là các số dương khác nhau.

a) Rút gọn biểu thức $A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$.

b) Tính giá trị của A khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.

TS lớp 10 Hà Nam 12 - 13

ĐS: a) $A = 0$ b) $A = 2\sqrt{3}/3$

1.50 Tính giá trị của biểu thức $H = (\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

TS lớp 10 Ninh Thuận 12 - 13

ĐS: $H = 4$

1.51 Rút gọn các biểu thức:

a) $N = (12\sqrt{2} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{8}) : \sqrt{2}$

b) $M = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{4}{\sqrt{5}+1}$

TS lớp 10 Hải Phòng 12 - 13

ĐS: $N = 7$; $M = 1$

1.52 Tìm điều kiện có nghĩa của biểu thức:

a) $\frac{1}{x-1}$

b) $\sqrt{x-2}$

TS lớp 10 Hòa Bình 12 - 13

1.53 a) Tìm x, biết $3x + \sqrt{2} = 2(x + \sqrt{2})$.

b) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

TS lớp 10 Hưng Yên 12 - 13

ĐS: a) $x = \sqrt{2}$ b) $A = -1$

1.54 a) Đơn giản biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

b) Cho biểu thức: $P = a - \left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \right)$, với $a \geq 1$

i) Rút gọn P

ii) Chứng tỏ $P \geq 0$.

TS lớp 10 Khánh Hòa 12 - 13 ĐS: a) $A = 1 + \sqrt{2}$ b) $P = a - 2\sqrt{a-1}$

1.55 a) Đơn giản biểu thức: $A = (3 + \sqrt{2} + \sqrt{11})(3 + \sqrt{2} - \sqrt{11})$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{ab + \sqrt{a} - b\sqrt{a} - 1}{a-1} = \frac{b\sqrt{a} + 1}{1 + \sqrt{a}}$, với $a \geq 0$, $a \neq 1$, $\forall b$.

TS lớp 10 Kiên Giang 12 - 13

ĐS: a) $A = 6\sqrt{2}$

1.56 a) Tính: $A = \sqrt{18} + 2\sqrt{2} - \sqrt{32}$.

b) Rút gọn: $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} + \sqrt{37 + 20\sqrt{3}}$

TS lớp 10 Lâm Đồng 12 - 13

ĐS: a) $A = \sqrt{2}$ b) $B = 10$

1.57 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{28} + \sqrt{63} - 2\sqrt{7}$.

b) $B = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right)$, với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

TS lớp 10 Long An 12 - 13

ĐS: a) $A = 3\sqrt{7}$ b) $B = 1 - a$

1.58 a) Tính giá trị của các biểu thức sau:

i) $A = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + 1$ ii) $B = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

b) Cho biểu thức: $P = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1 + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 1}$

i) Tìm x để P có nghĩa và rút gọn P.

ii) Tìm x để P là một số nguyên.

TS lớp 10 Lạng Sơn 12 - 13

ĐS: a) $A = \sqrt{3}$; $B = 5$ b) $P = 2/(\sqrt{x} - 1)$, $P \in \mathbb{Z}$ khi $x \in \{2; 5\}$

1.59 Cho $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$, với $x > 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Chứng minh rằng $A - 2 > 0$ với mọi x thỏa mãn $x > 0$ và $x \neq 1$.

TS lớp 10 Nam Định 12 - 13 ĐS: a) $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ b) $A - 2 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$

1.60 Cho $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.
b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A > 1/2$.
c) Tìm tất cả các giá trị của x để $B = \frac{7}{3}A$ đạt giá trị nguyên.

TS lớp 10 Nghệ An 12 - 13 ĐS : a) $A = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$ b) $0 < x < 4$ c) $x \in \{1/9; 64/9\}$

1.61 Cho $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn Q.
b) Tính giá trị của Q với $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

TS lớp 10 Ninh Bình 12 - 13 ĐS : a) $Q = (\sqrt{x}+1)/\sqrt{x}$ b) $Q = 3 + \sqrt{3}$

1.62 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$ b) $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$, với $x \geq 0$; $x \neq 1$.

TS lớp 10 Quảng Ninh 12 - 13 ĐS : a) $A = 3\sqrt{2}$ b) $B = 2/(\sqrt{x}+1)$

1.63 a) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

b) Cho biểu thức: $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$, với $x \geq 0$; $x \neq 16$

- i) Rút gọn biểu thức P.
ii) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

TS lớp 10 Thái Bình 12 - 13 ĐS : a) $A = -4$ b) i) $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ ii) $x \in \{0; 1/4; 4\}$

1.64 a) Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{4} - \sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25}$

b) Tìm x dương, biết: $\sqrt{x+1} = \sqrt{3}$

TS lớp 10 An Giang 13 - 14 ĐS : a) $A = -2$ b) $x = 2$

1.65 Rút gọn: $A = \left(6\sqrt{\frac{8}{9}} - 5\sqrt{\frac{32}{25}} + 14\sqrt{\frac{18}{49}} \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

TS lớp 10 Bà Rịa – Vũng Tàu 13 - 14 ĐS : $A = 123/7$

1.66 a) Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{144} : \sqrt{36}$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$, với $x > 0$, $x \neq 1$.

TS lớp 10 Bắc Giang 13 - 14 ĐS a) $A = -63$ b) $B = \sqrt{x}-1$

1.67 a) Với giá trị nào của x thì biểu thức: $\sqrt{x-5}$ các định ?

b) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

TS lớp 10 Bắc Ninh 13- 14

ĐS : $A = 2$

1.68 Tính : $P = \sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{18}$

TS lớp 10 Bến Tre 13 - 14

ĐS : $P = 0$

1.69 a) Rút gọn: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$, với $0 < x \neq 1$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$

TS lớp 10 Bình Định 13 - 14 ĐS : a) $A = \sqrt{x}-1$ b) $B = -\sqrt{6}/2$

1.70 a) Tính giá trị của biểu thức: $V = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{121}}$, $L = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

b) Cho $T = \frac{x+6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+3} - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$. Tìm x để T có nghĩa và rút gọn T .

TS lớp 10 Bình Phước 13 - 14 ĐS : a) $V = 5/11$; $L = 4$ b) $T = 1$

1.71 a) Tìm x không âm biết: $\sqrt{x} = 2$

b) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + 1 \right) \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - 1 \right)$.

TS lớp 10 Đà Nẵng 13 - 14

ĐS : a) $x = 4$ b) $P = 1$

1.72 a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

b) Chứng minh: $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x-y$ với $x > 0$, $y > 0$ và $x \neq y$.

TS lớp 10 Đắk Lắk 13 - 14

ĐS : a) $A = \sqrt{3}$

1.73 Cho biểu thức sau: $M = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - (\sqrt{x}-1)^2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}} + \frac{8}{x^2-1}$, với $x > 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $M > 0$.

TS lớp 10 Đắk Nông 13 - 14 ĐS : a) $M = 4/(x-1)$ b) $x > 1$

1.74 a) Cho hai biểu thức: $A = \sqrt{x-3}$ và $B = \sqrt{9}-\sqrt{4}$

i) Tính B .

ii) Với giá trị nào của x thì $A = B$.

b) Chứng minh: $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 2$, với $x > 0$, $x \neq 1$.

TS lớp 10 Đồng Tháp 13 - 14

ĐS: a) i) $B=1$ ii) $x=4$

1.75 Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{a-\sqrt{a}}{a-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$, với $a \geq 0, a \neq 1$.

b) $B = \frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

TS lớp 10 Hà Nam 13 - 14

ĐS: a) $A = \frac{1}{\sqrt{a}+1}$ b) $B=1+\sqrt{2}$

1.76 Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$, với $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tính giá trị biểu thức A tại $a = 2$.

TS lớp 10 Đồng Nai 13 - 14

ĐS: a) $A = \frac{4\sqrt{a}}{a-1}$ b) $A=4\sqrt{2}$

1.77 Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn B

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

TS lớp 10 Hà Nội 13 - 14 ĐS: 36 km/ha) $A = \frac{5}{4}$ b) $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ c) $0 < x < 4$

1.78 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $P = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}$

b) $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 9$.

TS lớp 10 Hà Tĩnh 13 - 14

ĐS: a) $P=7\sqrt{3}$ b) $Q = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

1.79 Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0$.

TS lớp 10 Hà Tĩnh 13 - 14

ĐS: $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

1.80 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2}$ b) $N = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

TS lớp 10 Hải Phòng 13 - 14

ĐS: a) $M = 12$ b) $N = 2$

1.81 a) Thực hiện phép tính: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

b) Rút gọn biểu thức: $\sqrt{\sqrt{6}+4} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}$

TS lớp 10 Lâm Đồng **13 - 14**

ĐS: a) 4 b) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

1.82 a) Tính giá trị của các biểu thức: $A = \sqrt{9} + \sqrt{4}$; $B = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{2}$

b) Rút gọn: $C = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

TS lớp 10 Lạng Sơn **13 - 14** ĐS: a) $A = 5; B = 1$ b) $C = 1/(\sqrt{x} + 1)$

1.83 a) Thực hiện phép tính:

i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

ii) $3\sqrt{20} + \sqrt{45} - 2\sqrt{80}$

b) Cho: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1} \right)$, với $a > 0$, $a \neq 1$ và $a \neq 4$.

i) Rút gọn P.

ii) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$.

TS lớp 10 Lào Cai **13 - 14** ĐS: a) i) 6 ii) $\sqrt{5}$ b) i) $P = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}}$ ii) $P < \frac{1}{3}$

1.84 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4}$

b) $B = \left(\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \right) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$, với $x > 0$, $y > 0$.

TS lớp 10 Long An **13 - 14**

ĐS: a) $A = 1$ b) $B = x - y$

1.85 Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A có giá trị là số nguyên.

TS lớp 10 Nam Định **13 - 14** ĐS: a) $A = 2/(x - 1)$ b) $x = 2; x = 3$

1.86 Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$

TS lớp 10 Nghệ An **13 - 14**

a) Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{3}$.

ĐS: a) $x \geq 0, x \neq 4$; $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ b) $x = 36$

1.87 Cho biểu thức: $P(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \left(\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1 \right)$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P(x).

b) Xác định x để: $2x^2 + P(x) \leq 0$

TS lớp 10 Ninh Thuận **13 - 14** ĐS: a) $P(x) = x - 1$ b) $0 \leq x \leq 1/2$

1.88 a) Tính $A = 2\sqrt{16} - \sqrt{49}$

b) Rút gọn: $B = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$, với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.

TS lớp 10 Phú Thọ 13 - 14

ĐS: a) $A = 1$ b) $B = 1 - a$

1.89 Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

TS lớp 10 Quảng Bình 13 - 14

ĐS: a) $A = 2/\sqrt{x}$ b) $x = 4$

1.90 a) Tính $A = 3\sqrt{16} + 5\sqrt{36}$

b) Chứng minh rằng với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

TS lớp 10 Quảng Ngãi 13 - 14

ĐS: a) $A = 42$

1.91 a) Tính $A = \frac{50 - \sqrt{25}}{\sqrt{36}}$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 2x}{x - \sqrt{x}}$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

TS lớp 10 Quảng Ninh 13 - 14

ĐS: a) $A = 15/2$ b) $b = \sqrt{x} - 1$

1.92 Tính giá trị các biểu thức sau bằng cách biến đổi, rút gọn thích hợp:

a) $A = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} - 2\sqrt{2}$

b) $B = 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$

TS lớp 10 Thừa Thiên – Huế 13 - 14

ĐS: a) $A = 2$ b) $B = 1$

1.93 Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{4}{3 - \sqrt{7}} - \frac{21}{\sqrt{7}}$

TS lớp 10 Tiền Giang 13 - 14

ĐS: $A = 4$

1.94 a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{6} - 2} + \frac{1}{\sqrt{6} + 2}$

b) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + 1 + \sqrt{x - 2}$ với $2 \leq x < 3$

TS lớp 10 Cà Mau 14 - 15

ĐS: a) $A = \sqrt{6}/2$ b) $B = 2$

1.95 Rút gọn: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x} - 4} - \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 4} + \frac{\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \geq 0$; $x \neq 1$)

TS lớp 10 Hải Dương 14 - 15

ĐS: $A = (7 - 3\sqrt{x})/(\sqrt{x} + 4)$

1.96 a) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 9$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

i) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

ii) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$

TS lớp 10 Hà Nội 14 - 15 ĐS: a) $A = 2$ b) i) HS tự cm ii) $x = 1/4$

1.97 Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A < 0$.

TS lớp 10 Nghệ An 14 - 15 ĐS: a) $x \geq 0$ và $x \neq 1$ b) $0 \leq x < 1$

1.98 Cho biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}-2} + \frac{a}{a-4}$ với $a \geq 0$; $a \neq 4$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của biểu thức $A - \frac{2}{\sqrt{3}}$ khi $a = 7 + 4\sqrt{3}$

TS lớp 10 Quảng Bình 14 - 15 ĐS: a) $A = \sqrt{x}/(\sqrt{x}-2)$ b) $A = 1$

1.99 a) Không dùng máy tính, hãy rút gọn biểu thức sau:

$$A = (\sqrt{22} + 7\sqrt{2})\sqrt{30} - 7\sqrt{11}$$

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+6}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

TS lớp 10 Thái Nguyên 14 - 15 ĐS: a) $A = 38$ b) $B = (x-2)/(\sqrt{x}+2)$

PHẦN ĐÁP ÁN – HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA SỐ.

I.1: Loại 1: Dạng chứa căn số học đơn giản.

Bài tập 01. $A = \sqrt{3}(\sqrt{27} + 4\sqrt{3}) = \sqrt{81} + 4\sqrt{9} = 9 + 4.3 = 21$

Bài tập 02.

$$A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 5.3\sqrt{3} + 4.2\sqrt{3}) : \sqrt{3} = -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$$

Bài tập 03. $A = \sqrt{27} - 2\sqrt{27} - \sqrt{75} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

Bài tập 04. $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Bài tập 05.

$$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3^2.3} - \sqrt{10^2.3} = 2\sqrt{3} + 3.3.\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Bài tập 06.

$$A = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 5.3\sqrt{3} + 4.2\sqrt{3}) : \sqrt{3} = -5\sqrt{3} : \sqrt{3} = -5$$

Bài tập 07. $A = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

Bài tập 08. $A = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{9.2} = 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

Bài tập 09. $A = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48} = 2\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Bài tập 10.

$$M = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2} = (15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{2})\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.\sqrt{2} = 12$$

Bài tập 11. $2\sqrt{9} + \sqrt{25} - 5\sqrt{4} = 5 + 5 - 10 = 0$

Bài tập 12.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 4\sqrt{8} + 3\sqrt{75} &= 2\sqrt{4^2.2} - 5\sqrt{3^2.3} - 4\sqrt{2^2.2} + 3\sqrt{5^2.3} \\ &= 8\sqrt{2} - 15\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 15\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

Bài tập 13.

$$\begin{aligned} a) A &= 2\sqrt{3.5^2} - 3\sqrt{3.2^2} + \sqrt{3.3^2} = 2.5.\sqrt{3} - 3.2.\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

Bài tập 14. $A = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45} - \sqrt{500} = 2\sqrt{5} + 3.3\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = \sqrt{5}$

Bài tập 15.

$$M = (3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8})\sqrt{2} = (15\sqrt{2} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{2})\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.\sqrt{2} = 12$$

Bài tập 16.

$$A = \sqrt{3} - \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Bài tập 17. $B = \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{3^2 \cdot 5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

I.2: Loại 2: Dạng “biểu thức số trong căn” tiềm ẩn “là hằng đẳng thức”

Bài tập 01.

$$\begin{aligned} B &= (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \\ &= (3 + \sqrt{3})|3 - \sqrt{3}| = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Bài tập 02.

$$\begin{aligned} b) B &= (\sqrt{5} - 1)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = (\sqrt{5} - 1)\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} \\ &= (\sqrt{5} - 1)|\sqrt{5} + 1| \\ &= (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) \\ &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

Bài tập 03.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{20} + \frac{1}{2}\sqrt{8} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= |\sqrt{5} - \sqrt{2}| + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} \text{ (Do } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0) \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Bài tập 04. Có $B = |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$ (Do $2 > \sqrt{3}$)

Bài tập 05:

$$\begin{aligned} B &= \frac{21}{2} \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)^2 - 3 \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{21}{2} (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{5} - 1)^2 - 3 (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} + 1)^2 - 15\sqrt{15} \\ &= \frac{15}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60 \end{aligned}$$

Bài tập 06.

$$\begin{aligned} B &= (3\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \\ &= (3 + \sqrt{3})|3 - \sqrt{3}| = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Bài tập 07.

$$P = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{1-\sqrt{3}} = \frac{|\sqrt{3}-1|}{1-\sqrt{3}} = 1$$

$$B = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I.3: Loại 3: Dạng sử dụng biểu thức liên hợp, trục căn thức, quy đồng...

Bài tập 01.

$$P = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - 2\sqrt{5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-10+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}-2} = \frac{5(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2} = 5$$

Bài tập 02:

$$B = \frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{6}{3^2-\sqrt{7}^2} = \frac{6}{9-7} = 3$$

Bài tập 03. $P = \sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}$

Bài tập 04.

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$$

$$= \sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$$

Bài tập 05.

$$\frac{2}{\sqrt{2}+2} + \frac{1}{3}\sqrt{18} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{3} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1-2} + \frac{3\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{-1} + \sqrt{2} = 2-\sqrt{2}+\sqrt{2}=2$$

Bài tập 06.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54} \\
 &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} - \sqrt{7 \cdot 4} + \sqrt{9 \cdot 6} \\
 &= \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{7-6} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{6} \\
 &= 2\sqrt{7} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{6} \\
 &= 5\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Bài tập 07:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A+B &= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{3} \\
 AB &= (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3-1=2 \\
 \frac{A}{B} &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \\
 A^2+B^2 &= (A+B)^2 - 2AB = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 = 12-4=8
 \end{aligned}$$

Bài tập 08.

$$P = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}+1-2\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}$$

Bài tập 09.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54} \\
 &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} - \sqrt{7 \cdot 4} + \sqrt{9 \cdot 6} \\
 &= \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{6}}{7-6} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{6} \\
 &= 2\sqrt{7} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{6} \\
 &= 5\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Bài tập 10.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
 &= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\
 &= 3\sqrt{5}-5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} \\
 &= 3\sqrt{5}-5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4} \\
 &= 3\sqrt{5}-5+5-2\sqrt{5} \\
 &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Bài tập 11.

$$M = \frac{6}{2-\sqrt{3}} + |2-\sqrt{3}| - \sqrt{75}$$

$$= 6(2+\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 14$$

Bài tập 12.

$$A = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 - \sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

Bài tập 13.

Ta có

$$A = (\sqrt{5})^2 - 2^2 - \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-2}$$

$$= 5 - 4 - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = 1 - (-1) = 2$$

Bài tập 15.

$$A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}}$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2}$$

Bài tập 14.

$$a) A = \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3+2.1.\sqrt{3}+1}} + \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3-2.1.\sqrt{3}+1}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}} + \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+1} + \frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(4-4\sqrt{3}+3) + (3+4\sqrt{3}+3)}{4-1}$$

$$= \frac{14}{1}$$

$$= 14$$

Bài tập 16.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

$$C = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) + (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1) - 2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3(3 - 1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

II.2 DẠNG TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

Loại 1: Sử dụng các Hằng đẳng thức

Bài tập 01.

$$M = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{ab} = \frac{2a \cdot 2b}{ab} = 4$$

Bài tập 02.

$$B = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + 1 + \sqrt{x-2} \text{ với } 2 \leq x < 3$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} + 1 + \sqrt{x-2} = |\sqrt{x-2}-1| + 1 + \sqrt{x-2}$$

$$= -\sqrt{x-2} + 1 + 1 + \sqrt{x-2} = 2$$

$$(\text{Vì } 2 < x < 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} - 1 < 0)$$

Bài tập 03.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 1 \\
 &= \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x})^3-1} - \frac{\sqrt{x}+x+1}{(\sqrt{x})^3-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+x+1-(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+x+1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}+x+1-\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x-1}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} \\
 &= \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 04:

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(\sqrt{x})^3+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - (\sqrt{x}-1) \\
 &= \frac{x-\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \\
 A-1 &= \frac{\sqrt{x}-(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 05.

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} \\
 &= |\sqrt{x}-1| \cdot (\sqrt{x}+1)
 \end{aligned}$$

- Nếu $\sqrt{x}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1$
- Nếu $\sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D = -(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = 1-x$

Bài tập 06:

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Loại 2: Sử dụng phương pháp quy đồng:

Bài tập 01.

Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-1} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{-2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-1) - 2(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

Bài tập 02.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ B &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ B &= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Bài tập 03.

Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$G = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - (\sqrt{x}-1) = 1$$

Bài tập 04.

Có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(x+\sqrt{x}-2) + (-x+\sqrt{x}+2)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \end{aligned}$$

Bài tập 05. Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{2(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} \end{aligned}$$

Bài tập 06.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \\ &(x > 0; x \neq 4) \end{aligned}$$

Bài tập 07.

ĐK: $a \geq 0; a \neq 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{a}+1-(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} : \frac{a+1}{a-1} \\ &= \frac{2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} \\ &= \frac{2}{a+1} \end{aligned}$$

Bài tập 08: với $x > 0$ và $x \neq 4$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

Bài tập 09:

$$A = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2}{a-1} = \frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1}{a-1} = \frac{4\sqrt{a}}{a-1}$$

Bài tập 10.

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{1}$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x}} \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{1} = 1$$

Bài tập 11.

$$Q = \frac{\sqrt{x}-4+\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}-4}$$

Bài tập 12.

$$Q = \left[\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad (0 < x \neq 1)$$

Bài tập 13.

Với $x > 0$ có $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x\sqrt{x} + x)$

$$= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x(\sqrt{x}+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot x(\sqrt{x}+1) = \sqrt{x}$$

Bài tập 14.

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \left(\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{(a-1)-(a-4)} = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

Bài tập 15.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4} \quad (x \geq 0; x \neq 4) \\
 &= \frac{3(\sqrt{x}+2) + 4(\sqrt{x}-2) - 12}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{7\sqrt{x}-14}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{7(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{7}{\sqrt{x}+2}
 \end{aligned}$$

Bài tập 16.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - 3 \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) - 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 - 3x + 3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{2(\sqrt{x}+2)}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{x}-1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 17.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{4\sqrt{x}(2+\sqrt{x})-8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-4+(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{-4x+8\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}-2} \quad \cdot \quad \text{Vậy } P = \frac{2x}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{2x}{\sqrt{x}-1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 18.

Ta có: Điều kiện: $a > 0, a \neq 1, a \neq 4$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} - (\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{(a - 1) - (a - 4)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)}{3} \\ &= \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Bài tập 19. Ta có:

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a} - 2} \right) : \frac{3\sqrt{a}}{a - 4} \\ &= \frac{\sqrt{a} - 2 + \sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)} \cdot \frac{a - 4}{3\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{a - 4} \cdot \frac{a - 4}{3\sqrt{a}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bài tập 20.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x} - 7}{2x - 3\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5x - 10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x} + 1) + 3(\sqrt{x} - 2) - (5\sqrt{x} - 7)}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} : \frac{2\sqrt{x} + 3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{2\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

Loại 3: Làm xuất hiện nhân tử chung rồi đơn giản biểu thức chứa căn sau đó quy đồng.

Bài tập 01.

$$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$$

Bài tập 02

$$B = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} + \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$B = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{a} \text{ với } a, b, \text{ là số dương.}$$

Bài tập 03. $A = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(3 - \frac{a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 5}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 25$

$$= \left(3 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(3 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 5)}{\sqrt{a} - 5}\right)$$

$$= (3 + \sqrt{a})(3 - \sqrt{a})$$

$$= 9 - a$$

Bài tập 04. Với $a \geq 0, a \neq 1$ ta có

$$P = \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right] \left[1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{1 - \sqrt{a}}\right] = (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a}) = 1 - (\sqrt{a})^2 = 1 - a$$

Bài tập 05.

$$M = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right) \text{ với } a \geq 0; a \neq 1$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{1 - \sqrt{a}}\right)$$

$$= (\sqrt{a} + 1)(1 - \sqrt{a})$$

$$= 1 - a$$

Bài tập 06.

$$M = \left(\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1} + 1\right) \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{1 - \sqrt{a}}\right)$$

$$= (\sqrt{a} + 1)(1 - \sqrt{a})$$

$$= 1 - a$$

Bài tập 07.

$$P = \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2}\right) \text{ với } a \geq 0; a \neq 1$$

$$P = \left(1 + \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2}\right) \text{ với } a \geq 0; a \neq 1$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} + 2}\right)$$

$$= (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a})$$

$$= 1^2 - (\sqrt{a})^2 = 1 - a$$

Bài tập 08.

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$P = \left(\frac{2}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2 + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+2) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} - 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 36(TM)$$

Bài tập 09.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Bài tập 10.

$$\text{ĐKXD: } x \geq 0, x \neq 4 (0,5 \text{ đ})$$

Rút gọn:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4} = \frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Bài tập 11.

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 9$

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right] (\sqrt{x}-3) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}-3) \\ &= \frac{4}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Bài tập 12.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-4} \right) \cdot \left(\sqrt{x}-1 + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - \frac{2}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}+3 \end{aligned}$$

Bài tập 13.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Bài tập 14.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{x-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

Kết luận: $A = \sqrt{x}-1$

Bài tập 15.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{x-\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 \end{aligned}$$

Bài tập 16.

$$P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Bài tập 17.

$$\begin{aligned} \text{Với } Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)+5\sqrt{x}-2}{x-4} \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Bài tập 18.

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})+(2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

Bài tập 19:

Giải.

$$a) P = (\sqrt{3}-1) \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1) \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} b) Q &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Bài tập 20.

$$B = \frac{\sqrt{x}-12}{6\sqrt{x}-36} + \frac{6}{x-6\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-12}{6(\sqrt{x}-6)} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} \quad 0,5$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-12)+6.6}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} = \frac{x-12\sqrt{x}+36}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} \quad 0,5$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-6)^2}{6\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)} = \frac{\sqrt{x}-6}{6\sqrt{x}} \quad 0,5$$

Bài tập 21.

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$C = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Bài tập 22.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Bài tập 23.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \\ \Leftrightarrow A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2-(x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{2}{x-1}$$

Bài tập 24.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+2) - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+x+2\sqrt{x}-2x+4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2+x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(x+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4$ thì $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$

Bài tập 25.

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 26.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \\
 &= \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Bài tập 27.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{4}{\sqrt{a}-1} + \frac{3}{\sqrt{a}+1} - \frac{6\sqrt{a}+2}{a-1} \\
 &= \frac{4(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \frac{3(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}+1} - \frac{6\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\
 &= \frac{4\sqrt{a}+4+3\sqrt{a}-3-6\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}+1}
 \end{aligned}$$

Bài tập 28.

Với $x \geq 0; x \neq 9$

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{x+9} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}-3} \\
 B &= \frac{21}{2} (\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2 - 3(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}})^2 - 15\sqrt{15} \\
 &= \frac{21}{2} (\sqrt{3}+1 + \sqrt{5}-1)^2 - 3(\sqrt{3}-1 + \sqrt{5}+1)^2 - 15\sqrt{15} \\
 &= \frac{15}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 15\sqrt{15} = 60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) (x > 0) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \\
 &= (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1
 \end{aligned}$$

Bài tập 29.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+2\sqrt{x}\sqrt{x}-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x-2}{\sqrt{x}(x-1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Bài tập 30.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}-10}{x-4} = \frac{2x-8}{x-4} = 2 \\ B &= (13-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20+2\sqrt{43+24\sqrt{3}}} \\ &= (2\sqrt{3}-1)^2(2+\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{20+2\sqrt{(4+3\sqrt{3})^2}} \\ &= (3\sqrt{3}+4)^2 - 8\sqrt{20+2(4+3\sqrt{3})} \\ &= (3\sqrt{3}+4)^2 - 8\sqrt{(3\sqrt{3}+1)^2} \\ &= 43+24\sqrt{3} - 8(3\sqrt{3}+1) = 35 \end{aligned}$$

Bài tập 31.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Bài tập 32.

a) Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{a}-1}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(a+2\sqrt{a}+1)-4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{4\sqrt{a}+4}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{a-2\sqrt{a}+1}{4\sqrt{a}} = \frac{4}{(\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Bài tập 33.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{-x + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(x-9)} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - x}{\sqrt{x}-3} \\
 &= \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{-9}{\sqrt{x}-3} \\
 &= \frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{-9\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-1}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

Bài tập 34.

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \text{ với } a>0; a \neq 4 \\
 &= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} \\
 &= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)
 \end{aligned}$$

II. 3. DẠNG TOÁN CHỨA CĂN VÀ BÀI TOÁN PHỤ

Bài 1: Tuyển sinh Hà Nam năm 15-16

$$B = \frac{x - \sqrt{x} - 2(\sqrt{x} + 2) - x + 4}{x - 4} = \frac{-3\sqrt{x}}{x - 4}$$

$$B = 1 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{x}}{x - 4} = 1 \Rightarrow x + 3\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (TM)}$$

Bài 2: Tuyển sinh Hà Nam năm 16-17.

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{x-4} \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Đề } B = 12 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa đk } 0 < x \neq 4 \text{)}$$

Bài 3: Tuyển sinh chuyên Hà Nam năm 14-15

$$\text{a) } P = \frac{(x-9) + (4-x) + (9-x)}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} : \frac{x-9-3\sqrt{x}+9}{x-9}$$

$$\frac{4-x}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} : \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{b) } x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2$$

$$\text{Nên } P = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

Bài 4: Tuyển sinh chuyên chung Hà Nam năm 15-16

Giải

$$\text{a) } Q = \frac{1+\sqrt{a}-1+\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{1-\sqrt{a}}$$

$$\text{b) } a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{Khi đó } Q = \frac{2}{1-\sqrt{2}-1} = -\sqrt{2}$$

Bài 5: Tuyển sinh Hà Nội năm 13-14

1) Với $x = 64$ ta có $A = \frac{2 + \sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2 + 8}{8} = \frac{5}{4}$

2) $B = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x}) + (2\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x} + 2x}{x\sqrt{x} + x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}$

3) Với $x > 0$ ta có:

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (Do } x > 0)$$

Bài 6: Tuyển sinh Lào Cai năm 13-14

a) Rút gọn

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \left(\frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)}{(a - 1) - (a - 4)} = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

b) So sánh giá trị của P với số $\frac{1}{3}$

Xét hiệu:

$$\frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{a} - 2 - \sqrt{a}}{3\sqrt{a}} = \frac{-2}{3\sqrt{a}} < 0$$

$$\Leftrightarrow P < \frac{1}{3}$$

Bài 7: Tuyển sinh Nam Định năm 13-14

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \\ A &= \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 2 - (x + \sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{x - 1} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{2}{x-1}$

b) Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có: $A = \frac{2}{x-1}$

Chỉ ra khi A có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $x - 1$ là ước của 2

Mà $U\{2\} = \{-2; -1; 1; 2\}$

TH1 : $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn điều kiện)

TH2 : $x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$ (không thỏa mãn điều kiện)

TH3 : $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn điều kiện)

TH4 : $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = 2, x = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 8: Tuyển sinh Hà Nội năm 14-15

Giải:

1. Với $x = 9$ ta có $A = \frac{3+1}{3-1} = 2$

2. a) $P = \left(\frac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Từ câu 2a ta có

$$2P = 2\sqrt{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 = 2x + 5\sqrt{x} \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}-1) = 0 \text{ và } x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Bài 9: Tuyển sinh Nghệ An năm 14-15

a). Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

b). $A < 0$ thì

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp ĐK: để $A < 0$ thì $0 \leq x < 1$

Bài 10: Tuyển sinh Thái Bình năm 14-15

Giải:

1. Với $x > 0; x \neq 4$, biểu thức có nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 4$ thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$

2. Ta có

$$\sqrt{x} > 0, \forall x > 0; x \neq 4$$

$$\Rightarrow A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < A < \frac{5}{2}, \text{ kết hợp với } A \text{ nhận giá trị là một số nguyên thì } A \in \{1; 2\}$$

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} (TM)$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 (L)$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 11: Tuyển sinh Thanh Hoá năm 14-15

Với với $x > 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} : \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Với

$$x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Bài 12: Tuyển sinh Khánh Hoà năm 15-16

a) ĐK: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned} M &= \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{y} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy})}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Với $x = (1 - \sqrt{3})^2; y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Bài 13: Tuyển sinh Quảng Bình năm 15-16

a) $A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2-1}$ với $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} + \frac{4x+2}{x^2-1} \\ &= \frac{x+1-x+1+4x+2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4x+4}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{x-1} \text{ (với } x \neq \pm 1) \end{aligned}$$

$$A = \frac{4}{x-1} \text{ với } x \neq \pm 1$$

b)

$$\text{Khi } A = \frac{4}{2015}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = \frac{4}{2015}$$

$$\Rightarrow x-1=2015$$

$$\Leftrightarrow x=2016(\text{TMĐK})$$

$$\text{Vậy khi } A = \frac{4}{x-1} \text{ thì } x = 2016$$

Bài 14: Tuyển sinh Thái Bình năm 15-16

Giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2) - (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) + x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + x + 2\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2 + x - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x} + 2) + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(x+1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{x} - 2}
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4$ thì $P = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 2}$

b) Ta có: $x = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ (thỏa mãn điều kiện xác định)
 $\Rightarrow \sqrt{x} = 2 + \sqrt{5}$

Khi đó : $P = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 1}{2 + \sqrt{5} - 2} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 4$

Vậy với $x = 9 + 4\sqrt{5}$ thì $P = 2\sqrt{5} + 4$

Bài 15: Tuyển sinh Nam Định năm 16-17

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2}{x - 4} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - 1 + \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} - \frac{2}{x - 4} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{x + 3\sqrt{x}}{x - 4} \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x}} \\
 &= \sqrt{x} + 3
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{x} + 3$

2. Với $x > 0$ và $x \neq 4$ Ta có:

$$P = x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = x + 3$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x = 1$ thỏa mãn

Vậy $x = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 16: Tuyển sinh Thanh Hoá năm 16-17

Giải

1) Có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$2) \quad A = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Vì x nguyên nên ta có A nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1$ là ước của 2

Mặt khác $x > 0$, $x \neq 1$ nên $\sqrt{x}-1 > -1$. Do đó:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-1=1 \\ \sqrt{x}-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=9 \end{cases} (TM)$$

Vậy $x = 4$ hoặc $x = 9$ thỏa mãn đề bài.

Bài 17: Tuyển sinh Chuyên Sơn La năm 16-17

$$\begin{aligned} \text{a) Rút gọn biểu thức: } P &= \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} \quad (x > 0; x \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$

Với $x > 0$, $x \neq 1$ thì $\frac{x-1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) > x \Leftrightarrow x > 2$. Vậy với $x > 2$ thì $P > \frac{1}{2}$

Bài 18: Tuyển sinh Lam Sơn – Thanh Hoá năm 14-15

1.1

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x + 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\
 &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}
 \end{aligned}$$

1.2

$$x = 2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} + 1)^2 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1 \quad (0,5d)$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

Bài 19: Tuyển sinh Bắc Giang năm 15-16

$$1) A = \frac{\sqrt{x} - 11}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

a) Để A có nghĩa, điều kiện là:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{x} - 11}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - 11 - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - 11 - (x - 2\sqrt{x}) + (2x + \sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{x + 4\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 6)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 1}
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+1}$

Để A có giá trị là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước của 5 (*)

Mặt khác $\sqrt{x}+1 \geq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \{1; 5\}$

– Nếu $\sqrt{x}+1 = 1 \Rightarrow x = 0$ (tm)

– Nếu $\sqrt{x}+1 = 5 \Rightarrow x = 16$ (tm)

Vậy các giá trị x cần tìm là $x = 0$ và $x = 16$.

Bài 20: Tuyển sinh Chuyên Hà Nam năm 09-10

P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Rút gọn P

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{x - 4\sqrt{x} + 4 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})} + \frac{-\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} = \frac{4}{(1-\sqrt{x})}$$

c) $P > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{(1-\sqrt{x})} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 > x \geq 0$

Bài 21: Tuyển sinh Ninh Thuận năm 15-16

a) Có

$$P = \frac{(2+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x}-2)+(-x+\sqrt{x}+2)}{x-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$$

b) Có

$$x = \sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{9+2.3.2\sqrt{2}+8} = \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2} = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow x \geq 0, x \neq 1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}.1+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow P = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{3+2\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2(1+\sqrt{2})} = 1$$

Bài 22: Tuyển sinh Hà Nội năm 16-17

1) $x = 25$ nên ta có: $\sqrt{x} = 5$

Khi đó ta có: $A = \frac{7}{5+8} = \frac{7}{13}$

2)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

3) $P = A.B$ nên ta có:

$$P = \frac{7}{\sqrt{x}+8} \cdot \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

+) Ta có $x \geq 0$ nên $P > 0$

$$+) x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Nên: } 0 < P \leq \frac{7}{3}$$

Đề $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}$

+) $P = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn điều kiện)

+) $P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$$

Biên tập và sưu tầm các nguồn tài liệu: Nguyễn Văn Tiến

Liên hệ: FB/Zalo 0986 915 960

Nguồn tài liệu: Tổng hợp Internet.

Xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đã chia sẻ tài liệu.

Chúc các em học sinh học tập tốt!