

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2023-2024**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: **150 phút**, không kể thời gian giao đề.

Đề thi có 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$.

b) Cho $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ với $x \neq 0, x \neq -1$. Tính $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 - 8c^3 + 28d^3 = 0$.

Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2 - 2)$ chia hết cho $P(x)$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\left(x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right) = 1 - y + \sqrt{y^2 + 3} \\ y^2 - 2(x - 2) = 3\sqrt{(y+1)(y^2 + 2x)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

b) Bạn An viết lên trên bảng 11 số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 30. Chứng minh rằng bạn An có thể xóa đi một số số sao cho các số còn lại trên bảng có tổng bằng 10.

Câu 4 (3,0 điểm). Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN , H là hình chiếu của I trên AB , IH cắt AN tại C , K là điểm đối xứng với N qua AB .

a) Chứng minh $CM.CB = CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O) . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm). Xét các số thực dương a, b, c ; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}}.$$

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....**Số báo danh:**.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – thang điểm

Câu 1 (2 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$.

Đáp án	Điểm
Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$. Ta có : $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m^2 - 2m - 8) = 9 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .	0,25
Ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x = m - 4$ và $x = m + 2$.	0,25
Trường hợp 1 : $x_1 = m - 4, x_2 = m + 2$, bài toán trở thành : $m - 4 + 6 = \sqrt{m + 2} \Leftrightarrow m + 2 = \sqrt{m + 2}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ (m + 2)^2 = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m^2 + 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m = -1 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$	0,25
Trường hợp 2: $x_1 = m + 2, x_2 = m - 4$, bài toán trở thành : $m + 2 + 6 = \sqrt{m - 4} \Leftrightarrow m + 8 = \sqrt{m - 4}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 8 \geq 0 \\ m - 4 \geq 0 \\ (m + 8)^2 = m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -8 \\ m \geq 4 \\ m^2 + 15m + 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -8 \\ m \geq 4 \\ m \in \emptyset \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$ Vậy $m = -1, m = -2$ thỏa mãn là các giá trị phải tìm.	0,25

b) Cho $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ với $x \neq 0, x \neq -1$. Tính $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$.

Đáp án	Điểm
Ta có: $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ với $x > 0$.	0,25
Thật vậy, khi $x > 0$, hai vế của đẳng thức đều dương nên bình phương hai vế của đẳng thức trên, ta được: $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)}$	0,25

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - 2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right]$ (luôn đúng)	
Áp dụng ta được: $f(1) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; f(2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; f(3) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots; f(2023) = 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024};$	0,25
Vậy $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023) = 2024 - \frac{1}{2024} = \frac{2024^2 - 1}{2024}.$	0,25

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 - 8c^3 + 28d^3 = 0$.

Chứng minh rằng $(a + b + c + d)^2$ chia hết cho 9.

Đáp án	Điểm
Từ giả thiết $a^3 + b^3 - 8c^3 + 28d^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 9c^3 + 27d^3 = 0$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 9c^3 - 27d^3.$ Vì $9c^3 - 27d^3$ chia hết cho 3 nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 3.	0,25
Mà $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$ $= (a-1)a(a+1) + (b-1)b(b+1) + (c-1)c(c+1) + (d-1)d(d+1)$ chia hết cho 3.	0,25
Suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.	0,25
Mà 3 là số nguyên tố, do đó $(a + b + c + d)^2$ chia hết cho 9.	0,25

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2 - 2)$ chia hết cho $P(x)$.

Đáp án	Điểm
Xét đa thức $P(x) = (x+1)^{2024}.$	0,5
Khi đó, ta có : $P(x^2 - 2) = (x^2 - 2 + 1)^{2024} = (x^2 - 1)^{2024}.$	0,25
$P(x^2 - 2) = (x^2 - 1)^{2024} = (x-1)^{2024} (x+1)^{2024}$ chia hết cho $P(x) = (x+1)^{2024}.$	0,25

(Lưu ý: Học sinh có thể chọn các đa thức khác thỏa mãn vẫn cho điểm tối đa).

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 1 - y + \sqrt{y^2 + 3} \\ y^2 + 2(x - 2) = 3\sqrt{(y+1)(y^2 + 2x)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Nội dung	Điểm
Điều kiện: $(y+1)(y^2 + 2x) \geq 0.$ Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x - 1 + \sqrt{(2x-1)^2 + 3} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 3}.$ Đặt $a = 2x - 1; b = -y$ ta có $a + \sqrt{a^2 + 3} = b + \sqrt{b^2 + 3} \Leftrightarrow a - b + (\sqrt{a^2 + 3} - \sqrt{b^2 + 3}) = 0$ $\Leftrightarrow a - b + \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3}} = 0 \Leftrightarrow (a - b) \left[1 + \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3}} \right] = 0$	0,25

$\Leftrightarrow a-b=0 \left(\text{do } 1+\frac{a+b}{\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}}=\frac{a+\sqrt{a^2+3}+b+\sqrt{b^2+3}}{\sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}}>0, \forall a,b \right)$ $\Leftrightarrow 1-2x=y \Leftrightarrow 2x=1-y.$	
Thay $1-2x=y$, vào phương trình (2), ta được: $(2) \Leftrightarrow y^2+y+3=3\sqrt{(y+1)(y^2-y+1)}. \text{ Điều kiện: } y \geq -1$ $\Leftrightarrow (y^2-y+1)+2(y+1)=3\sqrt{(y+1)(y^2-y+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{2(y+1)}{y^2-y+1}-3\sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}}+1=0$ Đặt $t=\sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}}$, ($t \geq 0$), ta có phương trình: $2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}}=1 \Leftrightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ y=2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn)	0,25
Với $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+1}{y^2-y+1}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2-5y-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5+\sqrt{37}}{2} \Rightarrow x=-\frac{3+\sqrt{37}}{4} \\ y=\frac{5-\sqrt{37}}{2} \Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{37}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right);\left(-\frac{1}{2};2\right);\left(-\frac{3+\sqrt{37}}{4};\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{37}}{4};\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\right\}.$	0,25

b) Bạn An viết lên trên bảng 11 số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 30. Chứng minh rằng bạn An có thể xóa đi một số sao cho các số còn lại trên bảng có tổng bằng 10.

Nội dung	Điểm
Giả sử các số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) bạn An viết lên bảng là $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_{11} = 30$. Gọi $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}, S_{11} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + a_{11}$. Ta có $1 \leq S_i \leq 30, \forall i = \overline{1, 11}$ và $S_i \neq S_j$ với mọi $i \neq j; i, j = \overline{1, 11}$.	0,25
Chia các tổng $S_1, S_2, \dots, S_{11}$ cho 10, có ít nhất 2 số có cùng số dư. Giả sử S_k, S_m ($S_k > S_m$) có cùng số dư khi chia cho 10. Khi đó $S_k - S_m : 10$. Mà $1 \leq S_k, S_m \leq 30$ nên $S_k - S_m = 10$ hoặc $S_k - S_m = 20$.	0,25
- Nếu $S_k - S_m = 10$ thì các số $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_k$ còn lại trên bảng thỏa mãn điều kiện.	0,25
- Nếu $S_k - S_m = 20$ thì $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_k = 20$ nên các số $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{11}$ là các số còn lại trên bảng thỏa mãn điều kiện.	0,25

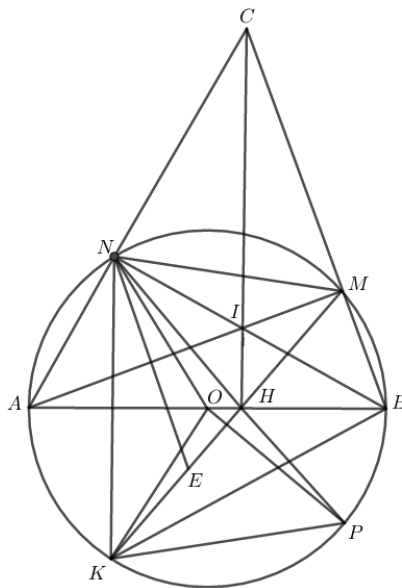
Câu 4 (3,0 điểm). Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN , H là hình chiếu của I trên AB , IH cắt AN tại C , K là điểm đối xứng với N qua AB .

a) Chứng minh $CM.CB = CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O) . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Vẽ hình:



a) Chứng minh rằng $CM.CB = CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

Đáp án	Điểm
Tam giác ABC nhận I làm trực tâm do có hai đường cao BN, CH cắt nhau tại I nên $BC \perp AI$ (1). Mặt khác $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $BM \perp AI$ (2). Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, M, C thẳng hàng.	0,25
Hai tam giác vuông BHC, IMC có $\widehat{C}$ chung nên đồng dạng. Suy ra $\frac{CI}{CB} = \frac{CM}{CH} \Leftrightarrow CM.CB = CI.CH$.	0,25
Tứ giác $ACMH$ nội tiếp nên $\widehat{BHM} = \widehat{ACM}$, $BCNH$ nội tiếp nên $\widehat{AHN} = \widehat{ACM}$. Suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{BHM}$.	0,25
Mà do tính đối xứng nên $\widehat{AHN} = \widehat{AHK}$. Vậy $\widehat{AHK} = \widehat{BHM}$. Vậy K, H, M thẳng hàng.	0,25

(Lưu ý: Học sinh không giải thích rõ lý do để các góc bằng nhau vẫn cho điểm tối đa).

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và đường tròn (O) . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Đáp án	Điểm
Theo tính chất đối xứng, ta có: $\widehat{NOA} = \widehat{AOK}$	0,25
Mặt khác: $\widehat{AOK} = \frac{1}{2}\widehat{NOK}$, $\widehat{NPK} = \frac{1}{2}\widehat{NOK}$ (cùng bằng một nửa góc $\widehat{NOK}$). Do đó $\widehat{AOK} = \widehat{NPK}$. Suy ra tứ giác $OHPK$ nội tiếp.	0,25
Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác HPK chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OPK . Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK nằm trên đường trung trực của đoạn OK .	0,25
Do N cố định nên K cố định. Suy ra OK cố định, (Đpcm).	0,25

(Lưu ý: Học sinh không giải thích rõ lý do để các góc bằng nhau vẫn cho điểm tối đa).

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án	Điểm
Lấy E thuộc đoạn MK sao cho $ME = MN$, suy ra tam giác MNE cân tại M . Mặt khác $\widehat{NME} = \widehat{NBK} = 2.\widehat{NBA} = 2.30^\circ = 60^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NK) Vậy tam giác MNE đều.	0,25
Xét tam giác MNB và ENK có: $MN = NE, NB = NK$. Lại có: $\widehat{MNB} + \widehat{BNK} = \widehat{MNK}, \widehat{KNE} + \widehat{ENM} = \widehat{MNK}, \widehat{BNK} = \widehat{ENM} = 60^\circ$ (do hai tam giác MNE, BNK đều). Suy ra $\widehat{MNB} = \widehat{KNE}$. Do đó tam giác MNB và ENK bằng nhau.	0,25
Suy ra $MB = EK$. $\Rightarrow MB + MN = KE + ME = KM$.	0,25
Vậy tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất khi KM là đường kính của đường tròn tâm O .	0,25

(Lưu ý: Học sinh không giải thích rõ lý do để các góc bằng nhau vẫn cho điểm tối đa).

Câu 5 (1,0 điểm). Xét các số thực dương a, b, c ; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}}.$$

Đáp án	Điểm
Ta có: $F = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2 + 9bc} + b\sqrt{b^2 + 9ac} + c\sqrt{c^2 + 9ab}}.$	0,25

Mặt khác: $a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}=\sqrt{a}\sqrt{a^3+9abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+9abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc}$ $\leq \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc)}.$ Do đó : $F \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc)}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+27abc}}$	0,25
Xét bất đẳng thức: $10(a+b+c)^3 \geq 9(a^3+b^3+c^3+27abc)$ $\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+30(a+b)(b+c)(c+a) \geq 243abc$ luôn đúng theo bất đẳng thức AM - GM.	0,25
Do đó $\sqrt{(a^3+b^3+c^3+27abc)} \leq \sqrt{\frac{10}{9}(a+b+c)^3}.$ Suy ra: $\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+27abc}} \geq \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}} \Rightarrow F \geq \frac{3}{\sqrt{10}}, F = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow a=b=c.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{3}{\sqrt{10}}.$	0,25

.....**Hết**.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2023 – 2024**

Môn: Toán

(Dành cho thí sinh thi chuyên Tin)

*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề
Đề thi có 01 trang*

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$.

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho $3^n + 7^n$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n + 6^n + 2023^n$ cho 11.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-3}y = 16-3x+9y \\ 2\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3} = 5y+1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

b) Viết lên trên bảng 2023 số: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2022}; \frac{1}{2023}$. Mỗi bước ta xoá đi 2 số x, y bất kì trên bảng rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Thực hiện liên tục thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O) , M là điểm đối xứng với P qua AB .

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q . Chứng minh Q đối xứng với P qua OA .

c) Gọi K là trung điểm của EF . Chứng minh đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại B, C đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm). Xét ba số $x, y, z \geq 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x+y+z) + 27$; tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \frac{\sqrt{y^2-4}}{y} + \frac{\sqrt{z^2-4}}{z}$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....**Số báo danh:**.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – Thang điểm

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$.

Đáp án	Điểm
Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và $x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.	0,25
Xét $2 x_1 + x_2 = x_1 - x_2 \Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = 0$.	0,25
Áp dụng định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m^2 - m \end{cases}$ Ta được $12(m-1)^2 + 4(m^2 - m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m + 3 = 0$.	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện, giá trị $m = \frac{3}{4}$ thỏa mãn.	0,25

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Đáp án	Điểm
Ta có: $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y} \Leftrightarrow (x-2y)(2x+y) = 3xy \Leftrightarrow 2x^2 - 6xy - 2y^2 = 0$.	0,25
$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ hoặc $\frac{x}{y} = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.	0,25
Với $\frac{x}{y} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3+\sqrt{13}} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Ta được $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = 11$.	0,25
Với $\frac{x}{y} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3-\sqrt{13}} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$. Ta được $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = 11$.	0,25

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.

Đáp án	Điểm
Vì $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$ nên $(2x + 1) : (x^2 - x - 1)$	0,25
$\Rightarrow (2x + 1)(2x - 3) : (x^2 - x - 1)$	0,25
$\Rightarrow (4x^2 - 4x - 3) : (x^2 - x - 1)$ $\Rightarrow [4(x^2 - x - 1) + 1] : (x^2 - x - 1)$ $\Rightarrow 1 : (x^2 - x - 1)$ $\Rightarrow (x^2 - x - 1) \in \{-1; 1\}$ $\Rightarrow x \in \{0; 1; -1; 2\}$, mà x nguyên dương $\Rightarrow x \in \{1; 2\}$.	0,25
Với $x = 1$, ta có phương trình: $y^2 + y - 9 = -3 \Leftrightarrow y = 2$ hoặc $y = -3 < 0$ (không thỏa mãn) Với $x = 2$, ta có phương trình: $y^2 + 2y - 9 = 5 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 14 = 0$ (loại do phương trình có 2 nghiệm không nguyên). Thử lại $(x; y) = (1; 2)$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy cặp số nguyên dương $(x; y)$ cần tìm là $(1; 2)$.	0,25

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho $3^n + 7^n$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n + 6^n + 2023^n$ cho 11.

Đáp án	Điểm
- Với $n = 1 \Rightarrow 3^n + 7^n = 3 + 7 = 10 \not\equiv 0 \pmod{11}$ (không thỏa mãn). - Với $n = 3 \Rightarrow 3^n + 7^n = 3^3 + 7^3 = 370 \not\equiv 0 \pmod{11}$ (không thỏa mãn). - Với $n = 5 \Rightarrow 3^n + 7^n = 3^5 + 7^5 = 17050 \equiv 0 \pmod{11}$ (thỏa mãn).	0,25
Suy ra $n \geq 5$. Giả sử $n = 5k + r$ ($0 \leq r \leq 4$). Ta có $3^{5k+r} + 7^{5k+r} = (3^5)^k \cdot 3^r + (7^5)^k \cdot 7^r \equiv 3^r + 7^r \cdot (-1)^k \pmod{11}$ với $r = 0, 1, 2, 3, 4$. - Khi $r = 0 \Rightarrow 3^r + 7^r \cdot (-1)^k = 1 + (-1)^k \pmod{11}$ xảy ra khi k lẻ. - Khi $r = 1 \Rightarrow 3^r + 7^r \cdot (-1)^k = 3 + 7 \cdot (-1)^k \not\equiv 0 \pmod{11}$ với mọi k . - Khi $r = 2 \Rightarrow 3^r + 7^r \cdot (-1)^k = 3^2 + 7^2 \cdot (-1)^k \not\equiv 0 \pmod{11}$ với mọi k . - Khi $r = 3 \Rightarrow 3^r + 7^r \cdot (-1)^k = 3^3 + 7^3 \cdot (-1)^k \not\equiv 0 \pmod{11}$ với mọi k . - Khi $r = 4 \Rightarrow 3^r + 7^r \cdot (-1)^k = 3^4 + 7^4 \cdot (-1)^k \not\equiv 0 \pmod{11}$ với mọi k . Vậy $n = 5k$ (k lẻ).	0,5
Khi đó $2^n + 6^n + 2023^n = (2^5)^k + (6^5)^k + (2023)^{5k} \equiv (-1)^k + (-1)^k + (-1)^k \pmod{11}$ $\equiv -3 \pmod{11}$. Vậy $2^n + 6^n + 2023^n$ chia 11 có số dư là 8.	0,25

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-3y} = 16-3x+9y \\ 2\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3} = 5y+1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Đáp án	Điểm
Điều kiện: $x-3y \geq 0; x \geq 3; y \geq -3$. Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3(x-3y) + 2\sqrt{x-3y} - 16 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3y} - 2)(3\sqrt{x-3y} + 8) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3y} = 2$ $\Leftrightarrow x = 4 + 3y$.	0,25
Thế $x = 3y + 4$ vào phương trình (2) ta được $2\sqrt{3y+1} + \sqrt{y+3} = 5y+1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{3y+1} - 2) + (\sqrt{y+3} - 2) = 5y+1-6$ $\Leftrightarrow 2\frac{3(y-1)}{\sqrt{3y+1}+2} + \frac{y-1}{\sqrt{y+3}+2} - 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(\frac{6}{\sqrt{3y+1}+2} + \frac{1}{\sqrt{y+3}+2} - 5\right) = 0 \quad (*)$	0,25
Nhận thấy $\frac{6}{\sqrt{3y+1}+2} + \frac{1}{\sqrt{y+3}+2} - 5 < 3 + \frac{1}{2} - 5 < 0$ với mọi $y \geq -3$. Do đó (*) có nghiệm duy nhất $y = 1$ (thỏa mãn).	0,25
Với $y = 1$ ta được $x = 7$ (thỏa mãn). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (7; 1)$.	0,25

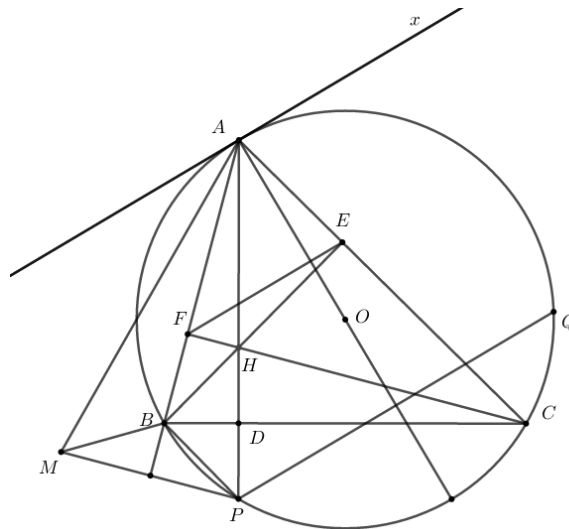
b) Viết lên trên bảng 2023 số: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2022}; \frac{1}{2023}$. Mỗi bước ta xoá đi 2 số x, y bất kì trên bảng rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Thực hiện liên tục thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Đáp án	Điểm
Đặt $z = \frac{xy}{x+y+1} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{z} + 1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{y} + 1\right) \quad (1).$	0,25
Với mỗi tập các số dương $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ tùy ý, xét biểu thức: $P(x_1; x_2; \dots; x_n) = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right)\left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n} + 1\right).$	0,25
Từ (1) suy ra mỗi lần xoá đi 2 số bất kì x, y rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ các số còn lại trên bảng giữ nguyên thì giá trị biểu thức P của các số trên bảng không đổi.	0,25

Gọi số cuối cùng là $a \Rightarrow P(a) = P\left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2022}; \frac{1}{2023}\right)$ $\Rightarrow \frac{1}{a} + 1 = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2022} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2023} + 1\right) = 2024! \Rightarrow a = \frac{1}{2024! - 1}.$ Vậy số còn lại trên bảng là $a = \frac{1}{2024! - 1}.$	0,25
---	-------------

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O) , M là điểm đối xứng với P qua AB .

- Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.
- Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q . Chứng minh Q đối xứng với P qua OA .
- Gọi K là trung điểm của EF . Chứng minh đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại B, C đồng quy.



- Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

Đáp án	Điểm
a) Vì M là điểm đối xứng với P qua AB nên $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$	0,25
Mà $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$).	0,25
Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{AHE}$ (vì tứ giác $CEHD$ nội tiếp)	0,25
Ta được $\widehat{AMB} = \widehat{AHE}$ do đó tứ giác $AHBM$ nội tiếp.	0,25

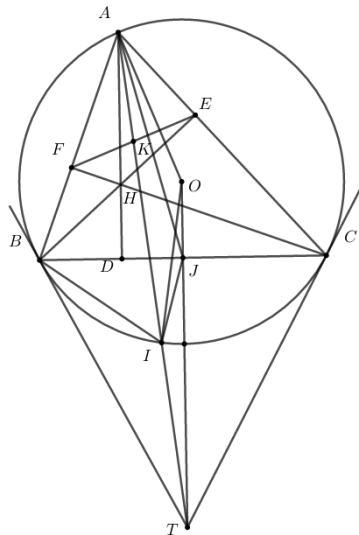
(Lưu ý: Học sinh không giải thích rõ lý do để các góc bằng nhau vẫn cho điểm tối đa).

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q . Chứng minh Q đối xứng với P qua OA .

Đáp án	Điểm
b) Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) . Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$	0,25
$\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$ (vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{AEF}$	0,25
$\Rightarrow Ax, EF$ song song. Mà $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp EF$	0,25
Theo giả thiết PQ, EF song song với nhau nên $PQ \perp OA$. Do đó theo định lý đường kính, đây cung ta được Q đối xứng với P qua OA .	0,25

(Lưu ý: Học sinh không giải thích rõ lý do để các góc bằng nhau vẫn cho điểm tối đa).

c) Gọi K là trung điểm của EF . Chứng minh đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại B, C đồng quy.



Đáp án	Điểm
Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau ở T . Gọi $I = AT \cap (O)$. Lấy J là trung điểm của BC $\Rightarrow O, J, T$ thẳng hàng. Có $TI \cdot TA = TB^2 = TJ \cdot TO \Rightarrow$ tứ giác $AOJI$ nội tiếp.	0,25
$\Rightarrow \widehat{IJT} = \widehat{OAI} = \widehat{OIA} = \widehat{OJA} \Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{BJI} \Rightarrow JB$ là phân giác của góc $\widehat{AJI}$	0,25
Xét $\widehat{AJC} = 180^\circ - \widehat{AJB} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AJI} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AOI} = 180^\circ - \widehat{ACI} = \widehat{ABI}$ Xét $\triangle AJC$ và $\triangle ABI$ có: $\widehat{AJC} = \widehat{ABI}$; $\widehat{ACJ} = \widehat{AIB}$. $\Rightarrow \widehat{JAC} = \widehat{BAI}$ (1)	0,25
Mặt khác $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng có hai đường trung tuyến tương ứng là AK, AJ $\Rightarrow \widehat{KAF} = \widehat{JAC}$ (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{FAK} \Rightarrow I \in AK \Rightarrow A, I, K$ thẳng hàng. Vậy đường thẳng AK và hai	0,25

tiếp tuyến của (O) tại B và C đồng quy.	
---	--

Câu 5 (1,0 điểm). Xét ba số $x, y, z \geq 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x + y + z) + 27$; tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{y} + \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z}$.

Đáp án	Điểm
Sử dụng bất đẳng thức: Với $a, b, c \geq 0$, ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a + b + c)}$. Áp dụng bất đẳng thức trên ta có: $Q = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{y^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{z^2}} \leq \sqrt{3 \left[3 - 4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \right]} = \sqrt{9 - 12 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)}$ Lại có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2$. Suy ra $Q \leq \sqrt{9 - 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2}$.	0,25
Từ giả thiết $4xyz = 9(x + y + z) + 27 \Leftrightarrow 9 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) + \frac{27}{xyz} = 4$ (*) Với $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2$ và $\frac{1}{xyz} \leq \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^3$ Từ (*) ta có $3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^3 \geq 4$ (**)	0,25
Đặt $t = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$ (do $(t + 2)^2 > 0$).	0,25
Suy ra $Q \leq \sqrt{9 - 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2} \leq \sqrt{9 - 4 \cdot 1^2} = \sqrt{5}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$. Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\sqrt{5}$.	0,25

.....**Hết**.....