

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3x-1}+2}$.

2) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox .

3) Biết hình tròn có chu vi là 8π cm. Tính diện tích hình tròn đó.

4) Cho hình trụ có chiều cao bằng 4 cm, diện tích một đáy bằng 36π cm². Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm x sao cho $P+6=0$.

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông cân.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x+y+2\sqrt{y(2x-1)}=10 \\ y-\sqrt{y}+\sqrt{2x-1}=6 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AD và OM là H .

1) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$.

2) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) và ba điểm A, D, F thẳng hàng.

3) Kẻ đường kính DK của đường tròn (O) . Gọi N là hình chiếu của A trên DK . Đường thẳng MK cắt AN tại E . Chứng minh rằng E là trung điểm của AN .

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^3 - 3x - 1 = 3x\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$.

2) Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $x+y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\sqrt{2(x^4 + y^4)} + \frac{8}{x+y} + 1.$$

-----HẾT-----

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x-1}}{x^2+2}$.
- 2) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox .
- 3) Biết hình tròn có chu vi là $4\pi \text{ cm}$. Tính diện tích hình tròn đó.
- 4) Cho khối trụ có chiều cao bằng 4 cm và bán kính đáy bằng 6 cm . Tính thể tích của khối trụ đó.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tìm x sao cho $P + x = 2$.

Câu 3. (2,5 điểm)

- 1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 2xy - y \\ 3x + y = 2(xy - y + 2) \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AD và OM là H .

- 1) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$.

2) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh tam giác OMI và tam giác OFH đồng dạng từ đó suy ra ba điểm A, D, F thẳng hàng.

- 3) Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp và $HB \cdot MC = MB \cdot HC$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x + \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{x^2+2x-3}$.

2) Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \frac{8}{x+y} + 1.$$

----- HẾT -----

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x-1}}{x^2+2}$.
- 2) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox .
- 3) Biết hình tròn có chu vi là $4\pi \text{ cm}$. Tính diện tích hình tròn đó.
- 4) Cho khối trụ có chiều cao bằng 4cm và bán kính đáy bằng 6cm. Tính thể tích của khối trụ đó.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tìm x sao cho $P + x = 2$.

Câu 3. (2,5 điểm)

- 1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$ (1) (với m là tham số).
 - a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
 - b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 2xy - y \\ 3x + y = 2(xy - y + 2) \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AD và OM là H .

- 1) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$.
- 2) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh tam giác OMI và tam giác OFH đồng dạng, từ đó suy ra ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- 3) Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp và $HB \cdot MC = MB \cdot HC$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x + \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

2) Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thoả mãn điều kiện $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \frac{8}{x + y} + 1$.

_____ **THCS.TOANMATH.com** _____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x-1}}{x^2+2}$.
- 2) Tìm tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 4$ với trục Ox .
- 3) Biết hình tròn có chu vi là $4\pi \text{ cm}$. Tính diện tích hình tròn đó.
- 4) Cho khối trụ có chiều cao bằng 4 cm và bán kính đáy bằng 6 cm . Tính thể tích của khối trụ đó.

Lời giải

- 1) Biểu thức A xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.
- 2) Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $M(-2;0)$

- 3) Gọi R là bán kính của đường tròn.

Khi đó ta có $2\pi R = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$.

Vậy diện tích của hình tròn là $S = \pi R^2 = 4\pi (\text{cm}^2)$.

- 4) Thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{1-x} - \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4}{x^2-2x+1}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tìm x sao cho $P + x = 2$.

Lời giải

- 1) Với $x \geq 0$, $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{3-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{4} \\ &= \left[\frac{(3-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+3)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^2} \right] \cdot \frac{(1-x)^2}{4} \\ &= \frac{4\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^2} \cdot \frac{(1-\sqrt{x})^2(1+\sqrt{x})^2}{4} \\ &= \sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - x. \end{aligned}$$

- 2) Theo câu 2.1) thì với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có $P = \sqrt{x} - x$.

Khi đó $P + x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4(tm)$.

Vậy $x = 4$.

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 2xy - y \\ 3x + y = 2(xy - y + 2) \end{cases}$$

Lời giải

1)

a) Phương trình (1) có $a + b + c = 1 - (m+2) + m + 1 = 0$ nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m + 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0$

b) Với $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = 1; x = m + 1$

Theo giả thiết ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow 1 + (m+1)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(tm) \\ m = -4(tm) \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$.

2) Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 2xy \\ 3(x + y) = x + y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

Suy ra $x = y = 1$. Vậy hệ có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$

Câu 4. (3,0 điểm)

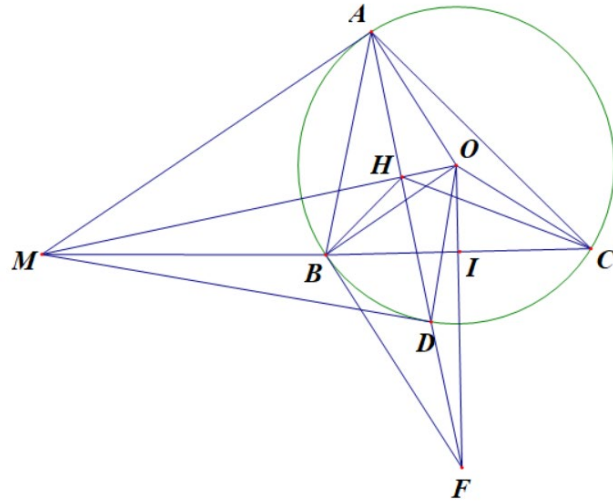
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Gọi I là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với A qua OM , giao điểm của AD và OM là H .

1) Chứng minh tứ giác $MAOI$ nội tiếp và $MD^2 = MB \cdot MC$.

2) Giả sử tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt OI tại F . Chứng minh tam giác OMI và tam giác OFH đồng dạng, từ đó suy ra ba điểm A, D, F thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ nội tiếp và $HB \cdot MC = MB \cdot HC$.

Lời giải



1)

+ Có MA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $MA \perp OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$ suy ra A thuộc đường tròn đường kính OM (1)

Mặt khác I là trung điểm BC và BC là một dây cung không đi qua tâm O nên $OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$ suy ra I thuộc đường tròn đường kính OM (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm M, A, O, I cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác $MAOI$ nội tiếp.

+ Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{MAB} = \widehat{ACM}$. Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCA$ có

$$\begin{cases} \widehat{MAB} = \widehat{ACM} \\ \widehat{M} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MCA \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC \quad (3)$$

Do D đối xứng với A qua OM nên $MD = MA$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $MD^2 = MB \cdot MC$.

2)

Nối H với F . Vì D là điểm đối xứng với A qua OM nên $OD = OA$ và $AD \perp OM$ tại H (1)

Trong tam giác vuông OBF có chiều cao BI ta có $OB^2 = OI \cdot BF \Rightarrow OA^2 = OI \cdot BF$ (2)

Trong tam giác vuông OAM có chiều cao AH ta có $OA^2 = OH \cdot OM$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $OI \cdot OF = OH \cdot OM \Leftrightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OH}{OF}$

Xét tam giác OMI và tam giác OFH có $\begin{cases} \text{O chung} \\ \frac{OI}{OM} = \frac{OH}{OF} \end{cases} \Rightarrow \triangle OMI \sim \triangle OFH \text{ (c.g.c)}$

$\widehat{OHF} = \widehat{OIM} = 90^\circ \Rightarrow FH \perp OM$ tại H (4)

Từ (1) và (4) suy ra A, D, F thẳng hàng.

3)

Trong tam giác vuông OAM có chiều cao AH ta có $MA^2 = MH.MO$

Lại có $MA^2 = MB.MC$

$$\text{Suy ra } MH.MO = MB.MC \Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{MC}{MO}$$

Xét tam giác MBO và tam giác MHC có

$$\begin{cases} \widehat{M} \text{ chung} \\ \frac{MH}{MB} = \frac{MC}{MO} \end{cases} \Rightarrow \Delta MBO \sim \Delta MHC \Rightarrow \widehat{MOB} = \widehat{MCH}$$

Vậy tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

$$\text{Khi đó ta có } \widehat{OBC} = \widehat{OHC}, \widehat{MHB} = \widehat{OCB}$$

Mà tam giác OBC cân tại O nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

$$\text{Do đó ta có } \widehat{MHB} = \widehat{OHC} \Rightarrow \widehat{BHF} = \widehat{CHF}.$$

Từ đó ta có HF là đường phân giác trong tại H của tam giác HBC

Mà $HF \perp MH$ nên MH là đường phân giác ngoài tại H của tam giác HBC .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{HB}{HC} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow HB.MC = MB.HC.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

$$1) \text{ Giải phương trình } x + \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}.$$

$$2) \text{ Xét hai số thực } x, y \text{ thay đổi luôn thỏa mãn điều kiện } x + y \geq 2. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \frac{8}{x+y} + 1.$$

Lời giải

$$1) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 (*)$$

$$\text{Khi đó } x + \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) + (x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) - 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \quad (t \geq 0)$$

$$\text{Suy ra } t^2 = 2x = 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \frac{t^2 - 2}{2}.$$

$$\text{Do đó phương trình trở thành } t + \frac{t^2 - 2}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(tm) \\ t = -4(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 1(tm(*)).$$

$$2) P = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \frac{8}{x+y} + 1$$

Ta chứng minh được bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2, \forall x, y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Suy ra $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq |x + y| = x + y$ (do $x + y \geq 2$)

Khi đó ta có $P \geq 4(x + y) + \frac{8}{x + y} + 1$

Đặt $t = x + y \Rightarrow t \geq 4$ suy ra $P \geq 4t + \frac{8}{t} + 1 = \left(2t + \frac{8}{t}\right) + 2t + 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cossi cho 2 số dương ta có $2t + \frac{8}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{8}{t}} = 8$

Mặt khác $t \geq 2 \Rightarrow 2t \geq 4$

Do đó $P \geq 8 + 4 + 1 = 13$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 13 đạt được khi $x = y = 1$.

_____ THCS.TOANMATH.com _____