

Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Cho phương trình $x^2 - 8x + 4 - 8m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$.
- b) Gọi a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b - c = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc$.

Câu 2 (2,0 điểm).

- a) Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(-2) = -29$, $P(1) = -5$ và $P(3) = 1$.
- b) Cho n là số nguyên dương sao cho $4n + 13$ và $5n + 16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n + 45$ chia hết cho 24.

Câu 3 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $2(17x^2 - 6) + (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x + 5} = 2x(3x^2 + 22)$.
- b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(146; 2022)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox . Tìm số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH . (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên).

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R > R'$ và O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại C và M , đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại N và D (C, D, M, N khác A). Gọi K là trung điểm của CD ; H là giao điểm của CN và DM .

- a) Chứng minh rằng năm điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.
- b) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD ; E là điểm đối xứng của C qua B ; P là giao điểm của AE và HD ; F là giao điểm của BH với (I) (F khác H); Q là giao điểm của CF với BP . Chứng minh rằng $BP = BQ$.
- c) Chứng minh rằng $\widehat{IBP} = 90^\circ$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{(x+y)^4} + \frac{y^4}{(y+z)^4} + \frac{z^4}{(z+x)^4}.$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Cho phương trình $x^2 - 8x + 4 - 8m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$.
- b) Gọi a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b - c = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc$.

Nội dung	Điểm
a) Cho phương trình $x^2 - 8x + 4 - 8m = 0$ (1). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$.	0,25
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 12 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$.	0,25
Vì x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 4 - 8m \end{cases}$.	0,25
Ta có $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 > 2 \\ 4 - 8m - 8 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{8}$. Vậy $-\frac{3}{2} < m < -\frac{3}{8}$ là các giá trị cần tìm.	0,25

b) Gọi a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b - c = \sqrt{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc$.	1,0
Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$	0,25
$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.	0,25
Mà $a + b - c = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$.	0,25
Suy ra $A = \sqrt{a^2 + 1} + 3bc = 11$.	0,25

Câu 2 (2,0 điểm).

- c) Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(-2) = -29$, $P(1) = -5$ và $P(3) = 1$.
- d) Cho n là số nguyên dương sao cho $4n+13$ và $5n+16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n+45$ chia hết cho 24.

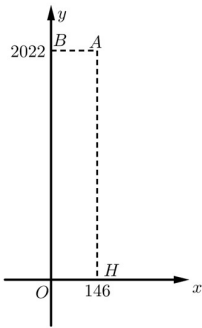
Nội dung	Điểm
a) Xác định các hệ số a, b, c của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ biết $P(-2) = -29$, $P(1) = -5$, $P(3) = 1$.	1,0
Vì $P(-2) = -29$ nên ta có $-8 + 4a - 2b + c = -29 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = -21$. Vì $P(1) = -5$ nên ta có $1 + a + b + c = -5 \Leftrightarrow a + b + c = -6$. Vì $P(3) = 1$ nên ta có $27 + 9a + 3b + c = 1 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -26$.	0,5
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a - 2b + c = -21 \\ a + b + c = -6 \\ 9a + 3b + c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -5 \end{cases}$	0,25
Vậy $a = -3$; $b = 2$; $c = -5$.	0,25
b) Cho n là số nguyên dương sao cho $4n+13$ và $5n+16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n+45$ chia hết cho 24.	1,0
Giả sử $4n+13 = a^2$ và $5n+16 = b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Từ $4n+13 = a^2 \Rightarrow a$ là số lẻ. Ta có $4n+13 = a^2 \Leftrightarrow 4(n+3) = a^2 - 1 \Leftrightarrow 4(n+3) = (a-1)(a+1)$. Vì a là số lẻ nên $a-1$ và $a+1$ là hai số chẵn liên tiếp, do đó $(a-1)(a+1) : 8 \Rightarrow (n+3) : 2 \Rightarrow n$ là số lẻ.	0,25

Suy ra $b^2 = 5n + 16$ là số lẻ. Lại có $5n + 16 = b^2 \Leftrightarrow 5(n + 3) = (b - 1)(b + 1) : 8$. Mà $(5; 8) = 1 \Rightarrow (n + 3) : 8 \quad (1)$	0,25
Ta có $a^2 + b^2 = 9n + 29 \equiv 2 \pmod{3}$ mà $a^2 \equiv \{0; 1\} \pmod{3}; b^2 \equiv \{0; 1\} \pmod{3} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$ $\Rightarrow \begin{cases} 4n + 13 \equiv 1 \pmod{3} \\ 5n + 16 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (n + 3) \equiv 0 \pmod{3} \quad (2).$	0,25
Vì $(3; 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra $(n + 3) : 24$. Từ đó $2023n + 45 = 2016n + 7(n + 3) + 24 : 24 \text{ (đpcm)}$.	0,25

Câu 3 (2,0 điểm).

- c) Giải phương trình: $2(17x^2 - 6) + (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x + 5} = 2x(3x^2 + 22)$.
- d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(146; 2022)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox . Tìm số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH . (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên).

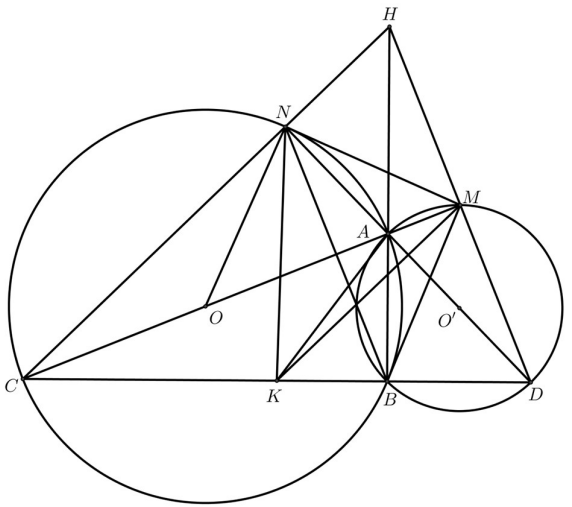
Nội dung	Điểm
a) Giải phương trình $2(17x^2 - 6) + (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x + 5} = 2x(3x^2 + 22) \quad (1).$	
+ Điều kiện $2x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow 6x^3 - 34x^2 + 44x + 12 - (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x + 5} = 0$ $\Leftrightarrow (x - 3)[6x^2 - 16x - 4 - (x - 1)\sqrt{2x + 5}] = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6x^2 - 16x - 4 - (x - 1)\sqrt{2x + 5} = 0 \end{cases} \quad (2)$ Phương trình (2) $\Leftrightarrow 6(x - 1)^2 - 2(2x + 5) - (x - 1)\sqrt{2x + 5} = 0 \quad (3).$ + Khi $x = 1$: Không thỏa mãn phương trình (3).	0,25

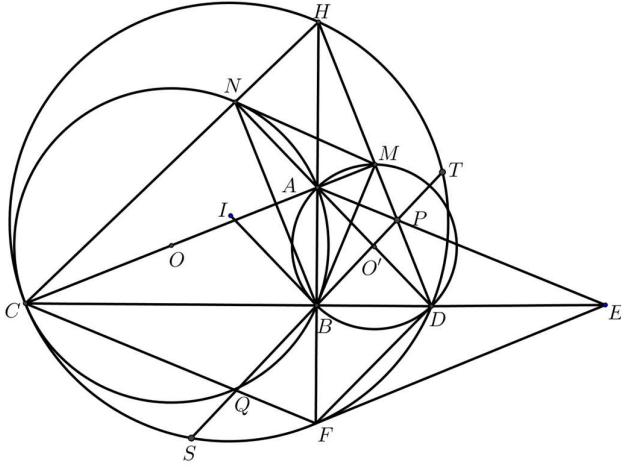
+ Khi $x \neq 1$, (3) $\Leftrightarrow 2 \frac{2x+5}{(x-1)^2} + \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = -2 \end{cases}$. • $\frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 9x^2 - 26x - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{13+2\sqrt{67}}{9}$.	0,25
• $\frac{\sqrt{2x+5}}{x-1} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 4x^2 - 10x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5-\sqrt{29}}{4}$. Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x \in \left\{ 3; \frac{13+2\sqrt{67}}{9}; \frac{5-\sqrt{29}}{4} \right\}$.	0,25
b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(146;2022)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox. Tìm số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH. (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên).	1,0
	
Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên trục Ox nên $H(146;0)$. Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên trục Oy, suy ra $B(0;2022)$. Gọi C là trung điểm của đoạn OA, suy ra $C(73;1011)$. Điểm $M(x_0; y_0)$ ($x_0; y_0 \in \mathbb{Z}$) là điểm nguyên nằm trong $\triangle OAH$ khi và chỉ khi điểm $M'(x'_0; y'_0)$ ($x'_0; y'_0 \in \mathbb{Z}$) đối xứng với điểm M qua C nằm trong $\triangle OAB$.	0,25
Suy ra số điểm nguyên nằm trong $\triangle OAH$ bằng số điểm nguyên nằm trong $\triangle OAB$. Do đó số điểm nguyên nằm trong tam giác OAH bằng $\frac{1}{2}$ (số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $ABOH$ trừ đi số điểm nguyên nằm trên đoạn thẳng OA).	0,25
Số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $ABOH$ bằng $145 \cdot 2021 = 293045$. Phương trình đường thẳng OA là $y = \frac{1011}{73}x$. Từ đó kiểm tra được số điểm nguyên trên đoạn	0,25

thẳng OA (trừ điểm O và A) bằng 1.	
Vậy số điểm nguyên trong ΔOAH bằng $\frac{293045-1}{2} = 146522$.	0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R > R'$ và O, O' thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Đường thẳng AO cắt (O) và (O') lần lượt tại C và M , đường thẳng AO' cắt (O) và (O') lần lượt tại N và D (C, D, M, N khác A). Gọi K là trung điểm của CD ; H là giao điểm của CN và DM .

- d) Chứng minh rằng năm điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.
- e) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD ; E là điểm đối xứng của C qua B ; P là giao điểm của AE và HD ; F là giao điểm của BH với (I) (F khác H); Q là giao điểm của CF với BP . Chứng minh rằng $BP = BQ$.
- f) Chứng minh rằng $\widehat{IBP} = 90^\circ$.

Nội dung	Điểm
<i>(Xét thể hình như hình vẽ. Các thể hình khác chứng minh tương tự).</i>	
a) Chứng minh rằng năm điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.	1,0
	
Ta có $\widehat{ANC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow AD \perp CH$. $\widehat{CMD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')) $\Rightarrow AC \perp DH$. Suy ra A là trực tâm tam giác $HCD \Rightarrow HA \perp CD \Rightarrow H, A, B$ thẳng hàng.	0,25
Để có tứ giác $CDMN$ nội tiếp đường tròn tâm $K \Rightarrow \widehat{MKN} = 2\widehat{MCN}$ (góc nội tiếp và góc ở	0,25

tâm cùng chắn $\widehat{MN}$) và $\widehat{HCM} = \widehat{HDN}$ (1).	
Ta có tứ giác $ABCN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{ABN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AN}$). Tứ giác $ABDM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$). Kết hợp với (1) suy ra $\widehat{ABN} = \widehat{ABM} = \widehat{ACN} \Rightarrow \widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 2\widehat{ACN}$ (2).	0,25
Ta có $\widehat{MON} = 2\widehat{ACN} = \widehat{MBN}$ (3). Từ (2) và (3) suy ra 5 điểm M, N, O, K, B cùng thuộc một đường tròn.	0,25
b) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD; E là điểm đối xứng của C qua B; P là giao điểm của AE và HD; F là giao điểm của BH với (I) (F khác H); Q là giao điểm của CF với BP. Chứng minh rằng $BP = BQ$.	1,0
	
Xét tứ giác $ACFE$ có hai đường chéo $CE \perp AF$ tại trung điểm B của CE (1).	0,25
Ta có $\widehat{DCM} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\widehat{CDH}$). Mà $\widehat{BHD} = \widehat{DCF}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DF}$) $\Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{DCF}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $ACFE$ là hình thoi.	0,25
Xét hai $\triangle BPE$ và $\triangle BQC$ có $\widehat{BEP} = \widehat{BCQ}$ (so le trong), $BE = BC$, $\widehat{EBP} = \widehat{CBQ}$ (đối đỉnh). Suy ra $\triangle BPE = \triangle BQC$ (g-c-g) $\Rightarrow BP = BQ$ (đpcm).	0,5
c) Chứng minh rằng $\widehat{IBP} = 90^\circ$.	1,0
Gọi S, T là giao điểm của BQ và (I) (như hình vẽ).	0,25

Xét tứ giác $ADEH$ có $\widehat{AED} = \widehat{AHD}$ (cùng bằng $\widehat{ACE}$), suy ra tứ giác $ADEH$ nội tiếp $\Rightarrow PD.PH = PA.PE = PT.PS$.	
Từ $\triangle BPE = \triangle BQC \Rightarrow PE = QC \Rightarrow PA = QF \Rightarrow PA.PE = QF.QC = QS.QT$.	0,25
Vậy $QS.QT = PT.PS \Leftrightarrow QS.(PQ + PT) = PT.(PQ + QS)$ $\Leftrightarrow QS.PQ + QS.PT = PT.PQ + PT.QS \Leftrightarrow QS.PQ = PT.PQ \Leftrightarrow QS = PT \Rightarrow B$ là trung điểm của $ST \Rightarrow IB \perp ST \Rightarrow \widehat{IBP} = 90^\circ$ (đpcm).	0,5

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{(x+y)^4} + \frac{y^4}{(y+z)^4} + \frac{z^4}{(z+x)^4}.$$

Nội dung	Điểm
Ta có $P = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^4} + \frac{1}{\left(\frac{z}{y}+1\right)^4} + \frac{1}{\left(\frac{x}{z}+1\right)^4}.$ Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$ và $abc = 1.$ $\Rightarrow P = \frac{1}{(a+1)^4} + \frac{1}{(b+1)^4} + \frac{1}{(c+1)^4}.$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{(a+1)^4} + \frac{1}{16} \geq 2\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(a+1)^4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(a+1)^2}.$ Tương tự có $\frac{1}{(b+1)^4} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{(b+1)^2}, \frac{1}{(c+1)^4} + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{(c+1)^2}.$ $\Rightarrow P + \frac{3}{16} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} \right).$	0,25
Ta chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$ với $a, b > 0.$ Thật vậy: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$ $\Leftrightarrow \left[(a+1)^2 + (b+1)^2 \right] (1+ab) \geq (a+1)^2 \cdot (b+1)^2$	0,25

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2)(1 + ab) \geq (ab + a + b + 1)^2$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2)(1 + ab) \geq (ab + a + b)^2 + 2(ab + a + b) + 1$ $\Leftrightarrow 1 + ab(a^2 + b^2) \geq 2ab + a^2b^2$ $\Leftrightarrow ab(a - b)^2 + (ab - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng). Dấu “=” xảy ra khi } a = b = 1.$	
Tương tự có $\frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^2} \geq \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+\frac{1}{ab}} = \frac{ab}{ab+1}.$	0,25
Khi đó $P \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} \right) - \frac{3}{16} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ab} + \frac{ab}{ab+1} - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{16} = \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16}.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{16}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1 \Rightarrow x = y = z$.	0,25

-----HẾT-----