

Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ – Hà Tĩnh

Câu 1: a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}) - 1$

b) Tìm m để đường thẳng $y = x + m^2 + 2$ và đường thẳng $y = (m - 2)x + 11$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung

Giải: a) Ta có $A = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - 1 = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$

b) Để hai đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm trên trục tung thì

$$\begin{cases} 1 \neq m - 2 \\ m^2 + 2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Câu 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m + 3 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m = 1$

b) Tìm m để hệ có nghiệm (x; y) sao cho $P = 98(x^2 + y^2) + 4m$ đạt GTNN

Giải: a) Khi $m = 1$ ta có hệ $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ 7y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy khi $m = 1$ thì hệ phương trình có nghiệm (x; y) = (2; 1)

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} x + 2y = m + 3 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2m + 6 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 - 2y \\ 7y = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5m + 9}{7} \\ y = \frac{m + 6}{7} \end{cases}$$

Với mọi m thì hệ luôn có nghiệm.

$$\text{Ta có } P = 98 \left[\left(\frac{5m + 9}{7} \right)^2 + \left(\frac{m + 6}{7} \right)^2 \right] + 4m = 52m^2 + 208m + 234 = 52(m + 2)^2 + 26 \geq 26.$$

Do đó GTNN của P bằng 26. Đạt được khi $m = -2$

Câu 3: a) Giải phương trình $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x} - \sqrt{6 - x - x^2} = 1$

b) Tìm m để phương trình $x^4 + 5x^2 + 6 - m = 0$ (m là tham số) có đúng hai nghiệm.

Giải: a) ĐKXĐ: $-3 \leq x \leq 2$. Đặt $\sqrt{x + 3} + \sqrt{2 - x} = t > 0 \Rightarrow \sqrt{6 - x - x^2} = \frac{t^2 - 5}{2}$

$$\text{Ta có phương trình } t - \frac{t^2 - 5}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ (vì } t > 0)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{6 - x - x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 1\}$

b) Đặt $x^2 = y \geq 0$. Ta có phương trình $y^2 + 5y + 6 - m = 0$ (*).

Để phương trình $x^4 + 5x^2 + 6 - m = 0$ có đúng 2 nghiệm thì phương trình (*) có đúng 1 nghiệm dương. Có hai trường hợp xảy ra

TH1: Phương trình (*) có nghiệm kép dương. Ta có $y_1 = y_2 = -\frac{5}{2}$ (loại)

TH2: Phương trình (*) có 2 nghiệm $y_1 < 0 < y_2 \Rightarrow 6 - m < 0 \Leftrightarrow m > 6$

Câu 4: Quảng đường AB dài 120 km. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc xác định. Khi từ B trở về A, ô tô chạy với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi từ A đến B là 10 km/h. Tính vận tốc lúc về của ô tô, biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi 24 phút

Giải: Gọi vận tốc của ô tô lúc về là x (km/h). ĐK: $x > 0$

Vận tốc của ô tô lúc đi là $x + 10$ (km/h).

Ta có thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{120}{x+10}$ (giờ). Thời gian về là $\frac{120}{x}$ (giờ)

Thời gian về nhiều hơn thời gian đi 24 phút $= \frac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{2}{5} \Rightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow (x+60)(x-50) = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ (vì } x > 0)$$

Đối chiếu điều kiện ta có vận tốc của ô tô lúc về là 50 km/h

Câu 5: Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O; R) bất kỳ đi qua B và C ($BC < 2R$). Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC

a) Chứng minh rằng 5 điểm A, M, O, I, N cùng thuộc 1 đường tròn

b) Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBC, E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MJ với đường tròn (O). Chứng minh rằng $EB = EC = EJ$

c) Khi đường tròn (O) thay đổi, gọi K là giao điểm của OA và MN. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định

Giải: a) Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$

Do đó 5 điểm A, M, O, I, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO

b) Vì J là tâm đường tròn

nội tiếp tam giác MBC nên

$$\widehat{BMJ} = \widehat{CMJ}; \widehat{MBJ} = \widehat{CBJ}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{EB} = \widehat{EC} \Rightarrow EB = EC$$

$$\text{Lại có } \widehat{BJE} = \widehat{BMJ} + \widehat{MBJ}$$

$$= \widehat{CBE} + \widehat{CBJ} = \widehat{JBE}$$

$$\Rightarrow \triangle BJE \text{ cân} \Rightarrow EB = EJ$$

c) Gọi P là giao điểm của MN với BC

$$\text{Ta có } \widehat{OKP} = \widehat{OIP} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OKP} + \widehat{OIP} = 180^\circ \text{ nên tứ giác OKPI nội tiếp}$$

Áp dụng phương tích trong đường tròn ta có $AK \cdot AO = AP \cdot AI$; $AM^2 = AB \cdot AC$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có $AM^2 = AK \cdot AO$.

Suy ra $AP \cdot AI = AB \cdot AC$ không đổi, mà I cố định nên P cố định. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác OKPI nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PI cố định

Câu 6: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{x^3}{z+x^2} + \frac{y^3}{x+y^2} + \frac{z^3}{y+z^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

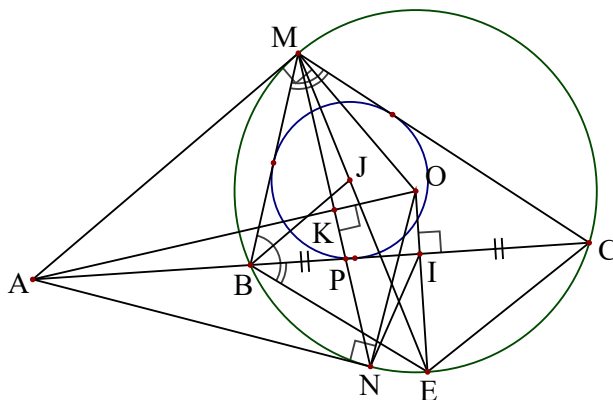
Giải: Áp dụng BĐT CauChy ta có

$$\frac{x^3}{z+x^2} = x - \frac{zx}{z+x^2} \geq x - \frac{zx}{2x\sqrt{z}} = x - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{z} \geq x - \frac{1}{2} \cdot \frac{z+1}{2} = x - \frac{z+1}{4}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{y^3}{x+y^2} \geq y - \frac{x+1}{4}; \frac{z^3}{y+z^2} \geq z - \frac{y}{4}. \text{ Cộng theo vế các BĐT này được}$$

$$\frac{x^3}{z+x^2} + \frac{y^3}{x+y^2} + \frac{z^3}{y+z^2} \geq (x+y+z) - \frac{x+y+z+3}{4} = \frac{3(x+y+z)}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\text{Mặt khác từ giả thiết } xy + yz + zx = 3xyz \Rightarrow 3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z \geq 3$$



Do đó $\frac{x^3}{z+x^2} + \frac{y^3}{x+y^2} + \frac{z^3}{y+z^2} \geq \frac{3.3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$