

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(xy + 5) + x^3y + 5x^2 = 42 \\ x^3 + 5x^2y + 6x + 30y = 42. \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\left(\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{3-x}\right)\left(2 + 3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right) = 24.$$

Câu II. (2 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$25y^2 + 354x + 60 = 36x^2 + 305y + (5y - 6x)^{2022}.$$

2) Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo qui tắc sau: mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào một hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là 8 số tự nhiên liên tiếp?

Câu III. (3 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < AD$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E, F không trùng với A, D) sao cho E nằm giữa A và F , đồng thời $\widehat{ABE} + \widehat{DCF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

1) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

2) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N . Chứng minh rằng $\widehat{DAM} + \widehat{ADN} + \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 180^\circ$.

3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD , đồng thời MP song song với AC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu IV. (1 điểm)

Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{6a+2c}{3b+c} + \frac{4a+3b+c}{b+c} \geq \frac{32a}{2a+b+c}.$$

-----HẾT-----

Giải chi tiết đề thi Toán điều kiện trường THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên

Nguyễn Duy Khương - Nguyễn Hoàng Việt - Trịnh Đình Triển - Khôi Hà - Nguyễn Văn Hoàng - Nguyễn Khang

1 Câu I

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(xy + 5) + x^3y + 5x^2 = 42 \\ x^3 + 5x^2y + 6x + 30y = 42 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\left(\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{3-x}\right)\left(2 + 3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right) = 24.$$

Lời giải.

1) Trừ theo 2 vế phương trình của hệ, ta thu được

$$(x-5)(x^2+6)(y-1) = 0$$

Suy ra hoặc $x = 5$ hoặc $y = 1$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $x = 5$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ suy ra

$$6(5y+5) + 5^3y + 5 \cdot 5^2 = 42,$$

hay là

$$155y + 113 = 0 \Rightarrow y = -\frac{113}{155}.$$

- Nếu $y = 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ suy ra

$$x^3 + 5x^2 + 6x + 30 = 42,$$

để nhẩm được nghiệm $x = 1$, từ đó sử dụng lược đồ Hoocner ta sẽ phân tích được thành

$$(x-1)(x^2+6x+12) = 0.$$

Mặt khác $x^2 + 6x + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 1$.

Kết luận ta tìm được 2 cặp giá trị (x, y) thỏa mãn là $(x, y) = \left(5, -\frac{113}{155}\right), (1, 1)$.

2) Đặt $\sqrt[3]{x+6} = a, \sqrt[3]{3-x} = b \Rightarrow a^3 + b^3 = 9$ hay là $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 9$.

Theo đề bài ta có

$$(a+b)(2+3ab) = 24$$

Suy ra

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a+b)(2+3ab) = 33.$$

Hay là

$$(a+b)[(a+b)^2 + 2] = 33.$$

Đặt $t = a+b \Rightarrow t(t^2 + 2) = 33 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 3t + 11) = 0$.

Lại có $t^2 + 3t + 11 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow t = 3$, hay $a+b = 3$.

Kết hợp $(a+b)(2+3ab) = 24 \Rightarrow 2+3ab = 8 \Rightarrow ab = 2$.

Ta có

$$\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$$

Nên theo định lí Viet đảo, a, b là 2 nghiệm của phương trình bậc 2:

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1, X = 2.$$

Xét hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $a = 1, b = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+6} = 1 \\ \sqrt[3]{3-x} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -5$.
- Trường hợp 2: $a = 2, b = 1$, dễ dàng tìm được $x = 2$.

Từ hai trường hợp ta có được $S = \{2, -5\}$

2 Câu II

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức:

$$25y^2 + 354x + 60 = 36x^2 + 305y + (5y - 6x)^{2022}$$

2) Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau: mỗi lần chọn ra

4 hộp bất kỳ và bỏ vào 1 hộp 1 viên, 1 hộp 2 viên, 2 hộp còn lại 3 viên.
Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là 8 số tự nhiên liên tiếp ?

Lời giải.

1) Phân tích nhân tử giả thiết ta được:

$$(6x - 5y + 1)(6x + 5y - 60) + (6x - 5y)^{2022} = 0(1)$$

Xét 2 trường hợp:

a) Trường hợp 1: $6x - 5y = 0 \Rightarrow (6x - 5y + 1)(6x + 5y - 60) = 0 \Rightarrow 6x + 5y = 60$
Giải hệ phương trình ta được: $x = 5; y = 6$ (thỏa mãn).

b) Trường hợp 2: $6x - 5y \neq 0$

Khi này, do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(6x - 5y + 1)(6x + 5y - 60):(6x - 5y)^{2022}$

Mà $6x - 5y + 1$ và $6x - 5y$ là 2 số nguyên liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $6x + 5y - 60:(6x - 5y)^{2022}$

Đặt $6x + 5y - 60 = (6x - 5y)^{2022} \cdot k (k \in \mathbb{Z})$

Khi này, thay vào (1) ta được:

$$(6x - 5y)^{2022} [k(6x - 5y + 1) + 1] = 0$$

$$\Rightarrow k(6x - 5y + 1) = -1$$

$$\text{Mà } 6x - 5y \neq 0 \Rightarrow 6x - 5y + 1 \neq 1$$

$$\Rightarrow k = 1; 6x - 5y + 1 = -1 \Rightarrow 6x = 5y - 2$$

$$\Rightarrow 10y - 62 = 2^{2022} \Rightarrow y = \frac{2^{2022} + 62}{10}$$

Để dàng nhận thấy, $2^{2022} = 16^{505} \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 2^{2022} + 62$ tận cùng là 6, không chia hết cho 10.

Nên trường hợp này không có nghiệm nguyên.

Vậy $x = 5; y = 6$ là nghiệm nguyên duy nhất của bài toán.

2) Gọi số bi các hộp liên tiếp lần lượt là $a, a + 1, \dots, a + 7 (a \in \mathbb{N})$

Khi này, tổng số bi 8 hộp là $4(2a + 7)$ viên.

Nhận thấy, mỗi lần thực hiện quy tắc sử dụng $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ viên bi

$$\text{nên } 4(2a+7):9 \Rightarrow 2a+7:9 \Rightarrow 2(a-1):9 \Rightarrow a-1:9$$

$$\text{Mà } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

$$\text{Số lần thực hiện quy tắc lúc đó là } \frac{4(2a+7)}{9} \geq 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 1$. Khi này, ta sẽ có 4 lần thực hiện quy tắc.

Ta sẽ chỉ ra tồn tại 1 cách thực hiện thỏa mãn, như sau:

Lần 1 : Thêm hộp 1 (1 viên), hộp 2 (2 viên), hộp 3 (3 viên), hộp 4 (3 viên).

Lần 2 : Thêm hộp 4 (1 viên), hộp 8 (2 viên), hộp 6 (3 viên), hộp 7 (3 viên).

Lần 3 : Thêm hộp 6 (1 viên), hộp 5 (2 viên), hộp 7 (3 viên), hộp 8 (3 viên).

Lần 4 : Thêm hộp 7 (1 viên), hộp 6 (2 viên), hộp 5 (3 viên), hộp 8 (3 viên).

Như vậy sau 4 lần, số viên bi từ hộp 1 đến hộp 8 cũng chính bằng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 8.

Vậy số lần thực hiện ít nhất là 4, để thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3 Câu III

Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < AD$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E, F không trùng với A, D) sao cho E nằm giữa A và F , đồng thời $\angle ABE + \angle DCF = \frac{1}{2}\angle BOC$.

- 1) Chứng minh rằng BE cắt CF tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .
- 2) Đường thẳng qua $O \parallel BC$ cắt BE, CF lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng $\angle DAM + \angle ADN + \frac{1}{2}\angle AOD = 180^\circ$.
- 3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho $NQ \parallel BD$ và $MP \parallel AC$. Chứng minh rằng đường tròn $(MNPQ)$ tiếp xúc với (O) .

$$\angle DCS = \frac{1}{2}\angle DOS = \frac{1}{2}(\angle DOA - \angle AOS) = \frac{1}{2}\angle BOC - \angle ABE = \angle DCF.$$

2) Ta có OM là đường trung bình của hình thang $AECB$ nên M là trung điểm EB . Tương tự N là trung điểm CF . Ta có góc như sau:

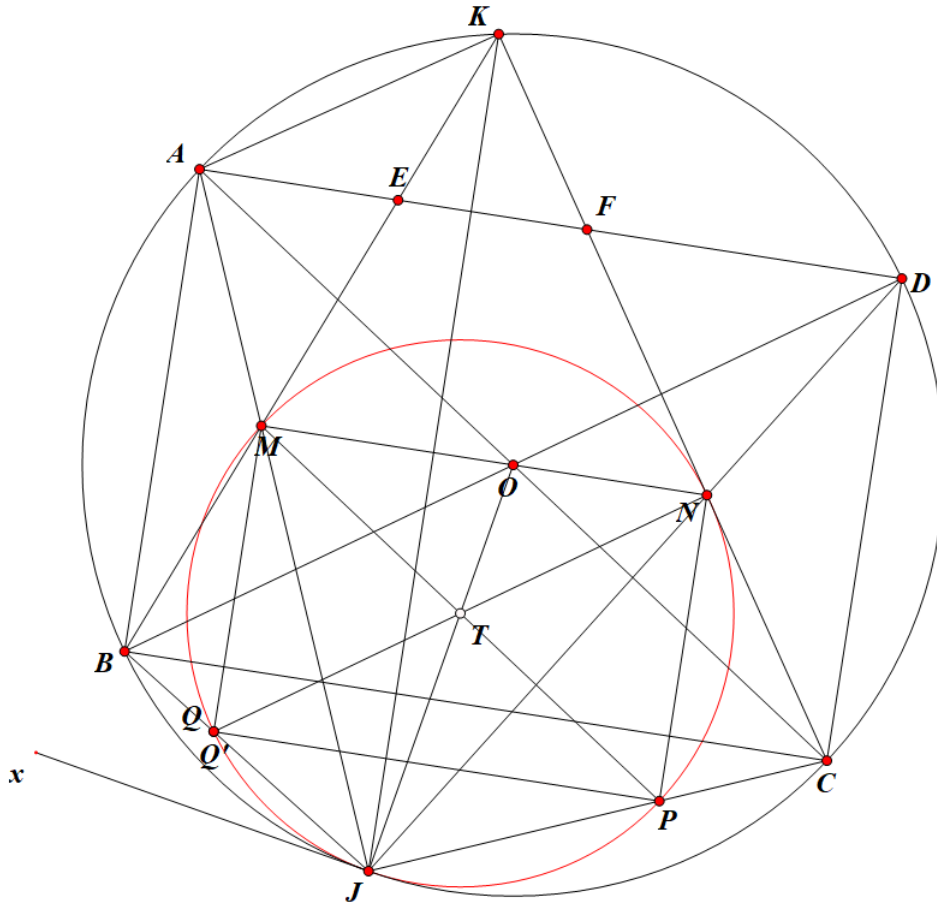
3) Gọi MP cắt NQ tại J thì J là tâm của $(MNPQ)$. Gọi T đối xứng với S qua MN . Vì MN đi qua O nên T nằm trên (O) . Đồng thời $\angle BAT = \angle BST =$

$\angle ABM = \angle BAM$ nên AM đi qua T . Tương tự ta suy ra T là giao điểm của AM và DN . Do $JM \parallel AO$, $JN \parallel DO$ nên ta có:

$$\angle MJN = \angle AOD = 2\angle ATD = 2\angle MTN$$

Hay T nằm trên (J) . Cuối cùng, kẻ tiếp tuyến Tx của đường tròn (O) như hình vẽ. Ta có: $\angle MTx = \angle ADT = \angle MNT$ hay Tx là tiếp tuyến của (J) . Vậy (O) tiếp xúc (J) tại T .

Lời giải 2(Nguyễn Duy Khương).



1) Từ giả thiết ta có: $\widehat{ABE} + \widehat{DCF} = \widehat{BAC}$. Gọi $BE \cap CF = K$ ta có: $\widehat{BKC} = 180^\circ - \widehat{EBC} - \widehat{FCD} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{EBA}) - (90^\circ - \widehat{FCD}) = \widehat{ABE} + \widehat{FCD} = \widehat{BAC}$ suy ra: $AKCB$ nội tiếp. Dẫn đến điều cần chứng minh.

2) Ta có: OM là đường trung bình của tam giác EBD và ON là đường trung bình tam giác AFC dẫn đến: M, N lần lượt là trung điểm EB, FC . Do đó: $\widehat{DAM} + \widehat{ADN} + \frac{\widehat{AOD}}{2} = \widehat{AEM} + \widehat{DFN} + \widehat{ACD} = \widehat{KEF} + \widehat{KFE} + \widehat{BKC} = \widehat{KEF} + \widehat{KFE} + \widehat{EKF} = 180^\circ$ hay điều cần chứng minh.

3) Gọi $AM \cap (O) = A, J$ ta có: $MA = MB$ dẫn đến: $KBJA$ là hình thang cân. Do đó: $AJ \perp MN$. Dẫn đến: $AJCD$ cũng là hình thang cân và J, N, D thẳng hàng. Gọi T là trung điểm NQ ta có T là tâm $(MNPQ)$. Gọi JB cắt (T) tại điểm Q' ta có: $MQ' \parallel AJ$ do đó: $\frac{Q'B}{Q'J} = \frac{BM}{MK} = \frac{MA}{MJ} = \frac{MD}{MJ}$ do đó: $NQ' \parallel BD$ do đó: Q trùng Q' . Do đó: B, J, Q thẳng hàng và tương tự: C, P, J thẳng hàng.

Kẻ tiếp tuyến Jx của (O) ta có: $\widehat{xJB} = \widehat{BCJ} = \widehat{JPQ}$ do đó: Jx tiếp xúc (T) . Dẫn đến: (T) tiếp xúc (O) hay điều cần chứng minh.

4 Câu IV

Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{6a+2c}{3b+c} + \frac{4a+3b+c}{b+c} \geq \frac{32a}{2a+b+c}.$$

Lời giải (Trịnh Đình Triển). Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ và $Cauchy - Schwarz$:

$$\begin{aligned} & \frac{2a+b+c}{3b+c} + \frac{2a+b+c}{2(a+c)} \geq \frac{4(2a+b+c)}{3b+3c+2a} \\ & = \frac{4(6a+b+c)(2a+b+c)}{(3b+3c+2a)(6a+b+c)} \geq \frac{6a+b+c}{2a+b+c} = 1 + \frac{4a}{2a+b+c}. \end{aligned}$$

Và

$$\frac{2(2a+b+c)}{3b+c} + \frac{3b}{b+c} \geq 2\sqrt{\frac{2(2a+b+c)}{b+c}} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + 2,$$

lại có

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2a+b+c}{2(a+c)} \geq 2\sqrt{\frac{a(2a+b+c)}{(a+b)(a+c)}}$$

Cộng ba đánh giá trên theo vế, kết hợp biểu thức ban đầu, ta quy về chứng minh:

$$2\sqrt{\frac{a(2a+b+c)}{(a+b)(a+c)}} + 2\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \frac{4a}{b+c} + 1 \geq \frac{28a}{2a+b+c},$$

đúng do

$$\sqrt{\frac{a(2a+b+c)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{a(2a+b+c)}{(a+b)(a+c)}} + \frac{2a}{b+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2a^2(2a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{4a^3(2a+b+c)}{2a(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{12a}{2a+b+c}$$

Ngoài ra thì

$$\frac{2a}{b+c} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b+c}} = \frac{4a}{\sqrt{2a(b+c)}} \geq \frac{8a}{2a+b+c}$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.