ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2021

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (2 điểm) Giải phương trình

$$13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}=61+x+3\sqrt{(5-x)(x+8)}.$$

Câu II. (2 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=1 \\ x(x+y)^4=x-y. \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13 ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.

Câu IV. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB.

1) Chứng minh rằng $\widehat{BJC}+\widehat{CKA}+\widehat{ALB}=450^\circ$.

2) Giả sử $PB=PC$ và $PC<PA$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của J, K, L trên các cạnh BC, CA, AB. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh rằng W nằm trên phân giác $\widehat{BAC}$.

Câu V. (1 điểm) Cho tập $A=\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất $(k>2)$ sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

------HẾT------

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN ĐIỀU KIỆN LỚP 10/2021 THPT CHUYÊN KHTN

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Lê Viết Ân – Nguyễn Văn Quý

1. Đề thi

Bài 1 (2.0 *điểm*). Giải phương trình

$$13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}=61+x+3\sqrt{(5-x)(x+8)}.$$

Bài 2 (2.0 *điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=1, \\ x(x+y)^4=x-y. \end{cases}$$

Bài 3 (2.0 *điểm*). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13, ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.

Bài 4 (3.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB.

a) Chứng minh rằng $\angle BJC+\angle CKA+\angle ALB=450^\circ$.

b) Giả sử $PB=PC$ và $PC<PA$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm J, K, L trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh rằng W nằm trên phân giác của góc BAC.

Bài 5 (1.0 *điểm*). Cho tập $A=\{1, 2, \dots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương $k>2$ lớn nhất sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (2.0 *điểm*). Giải phương trình

$$13\sqrt{5-x}+18\sqrt{x+8}=61+x+3\sqrt{(5-x)(x+8)}.$$

Lời giải. Điều kiện $-8\le x\le 5$. Đặt $a=\sqrt{5-x}$ và $b=\sqrt{x+8}$. Khi đó, ta có $a^2+b^2=13$ và $x+61=b^2+53=a^2+2b^2+40$. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$13a+18b=a^2+2b^2+40+3ab,$$

hay

$$(a+b)(a+2b)+40=8(a+b)+5(a+2b).$$

Một cách tương đương, ta có

$$(a+b-5)(a+2b-8)=0.$$

Suy ra $a+b=5$ hoặc $a+2b=8$.

- **Trường hợp 1: $a+b=5$.** Thay $a=5-b$ vào đẳng thức $a^2+b^2=13$, ta được $(5-b)^2+b^2=13$, hay $2(b-2)(b-3)=0$. Từ đó, ta có $b=2$ (tương ứng, $x=-4$) hoặc $b=3$ (tương ứng, $x=1$). Thử lại, ta thấy các giá trị $x=-4$ và $x=1$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

- **Trường hợp 2: $a+2b=8$.** Thay $a=8-2b$ vào đẳng thức $a^2+b^2=13$, ta được $(8-2b)^2+b^2=13$, hay $(b-3)(5b-17)=0$. Từ đó, ta có $b=3$ (tương ứng, $x=1$) hoặc $b=\frac{17}{5}$ (tương ứng, $x=\frac{89}{25}$). Thử lại, ta thấy các giá trị $x=1$ và $x=\frac{89}{25}$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=1$, $x=-4$ và $x=\frac{89}{25}$. □

Bài 2 (2.0 *điểm*)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=1, \\ x(x+y)^4=x-y. \end{cases}$$

Lời giải. Từ hệ phương trình, ta có

$$x(x+y)^4=(x-y)(x^4+y^4+6x^2y^2),$$

hay

$$y(5x^4+10x^2y^2+y^4)=0.$$

Nếu $y\neq 0$ thì hiển nhiên $5x^2+10x^2y^2+y^4>0$, phương trình trên không thể thỏa mãn. Do đó, ta phải có $y=0$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $x^4=1$, từ đó $x=1$ hoặc $x=-1$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x,\ y)$ là $(1,\ 0)$ và $(-1,\ 0)$. □

Bài 3 (2.0 *điểm*)**.** Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất, biết rằng khi chia n cho 7, 9, 11, 13, ta nhận được các số dư tương ứng là 3, 4, 5, 6.

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy $2n+1$ chia hết cho tất cả các số 7, 9, 11 và 13. Do đó $2n+1$ chia hết cho $[7,\ 9,\ 11,\ 13]=9009$. Mà $2n+1$ là số nguyên dương nên $2n+1\geq 9009$, tức $n\geq 4504$. Mặt khác, ta thấy $n=4504$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $n=4504$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. □

Bài 4 (3.0 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC có điểm P nằm trong tam giác (P không nằm trên các cạnh). Gọi J, K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB.

a) Chứng minh rằng $\angle BJC + \angle CKA + \angle ALB = 450°$.

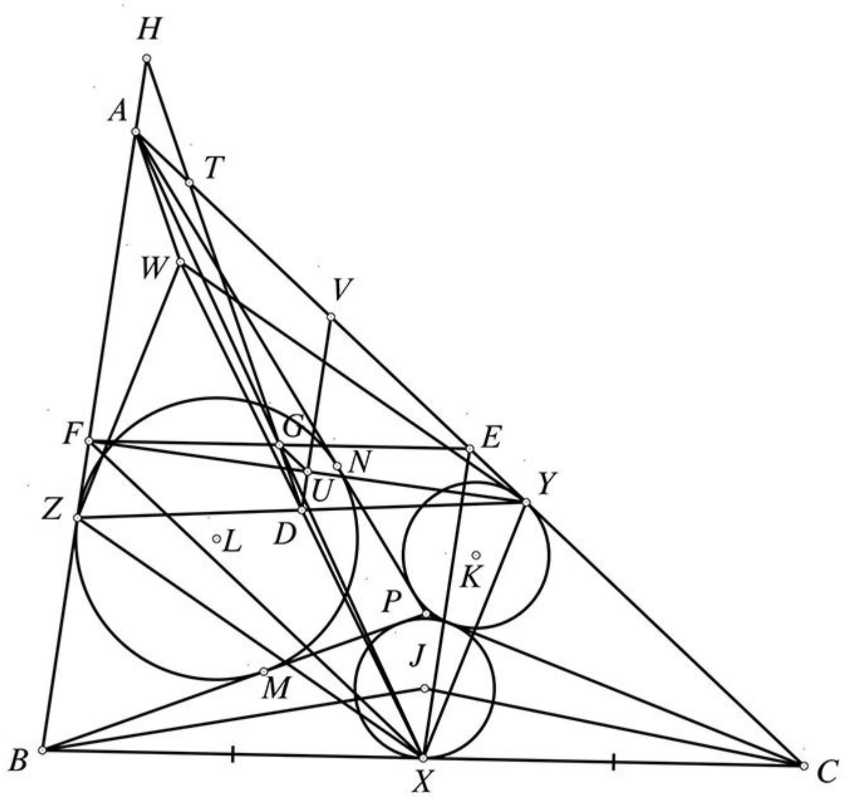
b) Giả sử $PB = PC$ và $PC < PA$. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm J, K, L trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Dựng hình bình hành $XYWZ$. Chứng minh rằng W nằm trên phân giác của góc BAC.

Lời giải. a) Ta có

$$\angle BJC = 180° - \angle JBC - \angle JCB = 180° - \frac{\angle PBC}{2} - \frac{\angle PCB}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có $\angle CKA = 180° - \frac{\angle PCA}{2} - \frac{\angle PAC}{2}$ và $\angle ALB = 180° - \frac{\angle PAB}{2} - \frac{\angle PBA}{2}$. Từ đó

$$\begin{aligned}
&\angle BJC + \angle CKA + \angle ALB \\
&\quad = 540° - \frac{(\angle PAB + \angle PAC) + (\angle PBC + \angle PBA) + (\angle PCA + \angle PCB)}{2} \\
&\quad = 540° - \frac{\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB}{2} = 540° - \frac{180°}{2} = 450°.
\end{aligned}$$



b) Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (L) nội tiếp tam giác PAB với các cạnh PB, PA. Hiển nhiên đường tròn (L) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm Z. Theo tính chất tiếp tuyến kẻ từ một điểm tới đường tròn, ta có $BZ = BM$, $PM = PN$ và $AN = AZ$. Do đó

$$\begin{aligned}BZ = BM = \frac{BZ + BM}{2} &= \frac{AB - AZ + BP - PM}{2} = \frac{AB + BP - (AZ + PM)}{2}\\ &= \frac{AB + AP - (AN + PN)}{2} = \frac{BA + BP - AP}{2}.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$CY = \frac{CA + CP - AP}{2}.$$

Bây giờ, gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC và AB. Ta có

$$EY = CE - CY = \frac{AC}{2} - \frac{CA + CP - AP}{2} = \frac{AP - CP}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$FZ = \frac{AP - BP}{2}.$$

Mà $BP = CP$ nên $EY = \frac{AP-CP}{2} = \frac{AP-BP}{2} = FZ$. Vì $BP = CP$ nên X là trung điểm của BC. Theo tính chất đường trung bình, ta có tứ giác $AEXF$ là hình bình hành.

Gọi D, G lần lượt là tâm của các hình bình hành $XYWZ$ và $AEXF$ thì D, G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng XW và XA. Do đó $DG \parallel AW$.

Gọi U là trung điểm của đoạn thẳng FY thì theo tính chất đường trung bình, ta có $DU \parallel FZ$, $GU \parallel EY$ và $DU = \frac{FZ}{2} = \frac{EY}{2} = GU$. Suy ra tam giác DUG cân tại đỉnh U.

Kéo dài các đoạn thẳng DG, DU cắt đường thẳng AC thứ tự tại T, V; gọi H là giao điểm của hai đường thẳng DG và AB. Ta có

$$\angle WAC = \angle DTV = \angle DGU = \angle GDU = \angle AHT = \angle WAB.$$

Do đó AW là phân giác của góc BAC, hay W nằm trên phân giác của góc BAC. □

Bài 5 (1.0 *điểm*). Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, 2021\}$. Tìm số nguyên dương $k > 2$ lớn nhất sao cho ta có thể chọn được k số phân biệt từ tập A mà tổng của hai số phân biệt bất kỳ trong k số được chọn không chia hết cho hiệu của chúng.

Lời giải. Xét các nhóm số $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\ldots$, $\{2017, 2018, 2019\}$, $\{2020, 2021\}$. Có tất cả 674 nhóm. Ta thấy rằng với hai số a, b phân biệt thuộc cùng một nhóm số thì hiển nhiên $a + b$ chia hết cho $a - b$. Do đó, ở mỗi nhóm số, ta chỉ được phép chọn tối đa một số. Suy ra số số được chọn từ tập A mà thỏa mãn yêu cầu đề bài phải không vượt quá 674, tức $k \leq 674$.

Mặt khác, ta thấy cách chọn 674 số sau thỏa mãn yêu cầu: $1, 4, \ldots, 2020$. Các số này đều cùng chia 3 dư 1 nên hiệu của hai số bất kỳ trong chúng chia hết cho 3, còn tổng không chia hết cho 3. Vì thế, tổng hai số bất kỳ trong các số này không chia hết cho hiệu của chúng.

Tóm lại, $k = 674$ là giá trị lớn nhất cần tìm. □