

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (2,0 điểm)

Viết vào tờ giấy thi đáp án đúng mà em chọn (Ví dụ: Câu 1 nếu chọn A là đúng thì viết Câu 1: A).

- Câu 1. Biểu thức $\sqrt{120 - 6x}$ có nghĩa khi
 A. $x \geq 20$. B. $x \leq 20$. C. $x < 20$. D. $x > 20$.
- Câu 2. Hàm số $y = (m - 2023)x + 2024$ (với m là tham số) đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi
 A. $m > 2023$. B. $m \geq 2024$. C. $m \leq 2023$. D. $m < 2024$.
- Câu 3. Phương trình $3x^2 - 7x + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó $|x_1 - x_2|$ bằng
 A. $\frac{7}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết độ dài các cạnh $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng
 A. 10 cm. B. $5\sqrt{2}$ cm. C. 5 cm. D. $\sqrt{10}$ cm.

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

- Câu 5 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$.
- Câu 6 (1,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).
 a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm tất cả các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.
- Câu 7 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số.
 a) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.
 b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
 $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 4$.
- Câu 8 (1,0 điểm). Một hãng taxi công nghệ cao có giá cước (giá tiền khách hàng phải trả cho mỗi km) được tính theo các mức như sau:
 Mức 1: Giá mở cửa cho 1 km đầu tiên là 20000 đồng;
 Mức 2: Từ trên 1 km đến 25 km;
 Mức 3: Từ trên 25 km.
 Biết rằng anh A đi 32 km phải trả tiền taxi là 479500 đồng còn chị B đi 41 km phải trả 592000 đồng. Hỏi giá cước của hãng taxi trên ở mức 2 và mức 3 là bao nhiêu? Nếu khách hàng đi 24 km thì phải trả taxi bao nhiêu tiền?
- Câu 9 (2,5 điểm). Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của (O) , A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $AC > AB$ ($A \neq B$). Gọi D là chân đường phân giác trong góc BAC ($D \in BC$). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại E . Kẻ EH, EK lần lượt vuông góc với AB và AC ($H \in AB, K \in AC$).
 a) Chứng minh $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.
 b) Gọi F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF .
 c) Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE, BE và BC . Chứng minh $BMDN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm A để bốn điểm H, N, I, K thẳng hàng.
- Câu 10 (0,5 điểm). Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}.$$

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: (2,0 điểm)

Mỗi câu đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4
Đáp án	B	A	D	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 5. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$

Nội dung
$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ 3(9 + 3y) + 2y = 5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ 11y = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (3; -2)$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}, (x \geq 0; x \neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức A .b) Tìm tất cả các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Nội dung
a) Rút gọn biểu thức.
$A = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$
$= \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - (\sqrt{x}-1) = \frac{x-\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}$
$= \frac{x-\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$
Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(1) = \{1; -1\}$
Nếu $\sqrt{x}-1=1 \Leftrightarrow x=4(t/m)$

Nếu $\sqrt{x}-1=-1 \Leftrightarrow x=0(t / m)$

Vậy $x \in\{0 ; 4\}$ thì A có giá trị nguyên.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-1=0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=5$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thỏa mãn điều kiện $\left(x_1^2-2 m x_1+m^2\right)\left(x_2+1\right)=4$

Nội dung
a) Với $m=5$, ta có phương trình: $x^2-11 x+24=0$
Ta có: $\Delta=(-11)^2-4.24=25>0$
Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=3 ; x_2=8$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{3 ; 8\}$
b) Ta có $\Delta=(2 m+1)^2-4\left(m^2-1\right)=4 m+5$ Để phương trình có hai nghiệm thì $4 m+5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-5}{4}$ Theo Vi-et, ta có: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2 m+1 \\ x_1 . x_2=m^2-1 \end{array}\right.$ Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có: $x_1^2-(2 m+1) x_1+m^2-1=0$ $\Leftrightarrow x_1^2-2 m x_1+m^2=x_1+1$ Thay $x_1^2-2 m x_1+m^2=x_1+1$ vào $\left(x_1^2-2 m x_1+m^2\right)\left(x_2+1\right)=4$ ta có: $\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=4$ $\Leftrightarrow x_1 x_2+x_1+x_2=3$ Suy ra $m^2-1+2 m+1=3 \Leftrightarrow m^2+2 m-3=0 \Leftrightarrow(m-1)(m+3)=0$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} m=1 & (t / m) \\ m=-3 & (k t / m) \end{array}\right.$ Vậy với $m=1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thỏa mãn điều kiện $\left(x_1^2-2 m x_1+m^2\right)\left(x_2+1\right)=4$

Câu 8 (1,0 điểm). Một hãng taxi công nghệ cao có giá cước (giá tiền khách hàng phải trả cho mỗi km) được tính theo các mức như sau:

Mức 1: Giá mở cửa cho 1 km đầu tiên là 20000 đồng

Mức 2: Từ trên 1 km đến 25 km

Mức 3: Từ trên 25 km

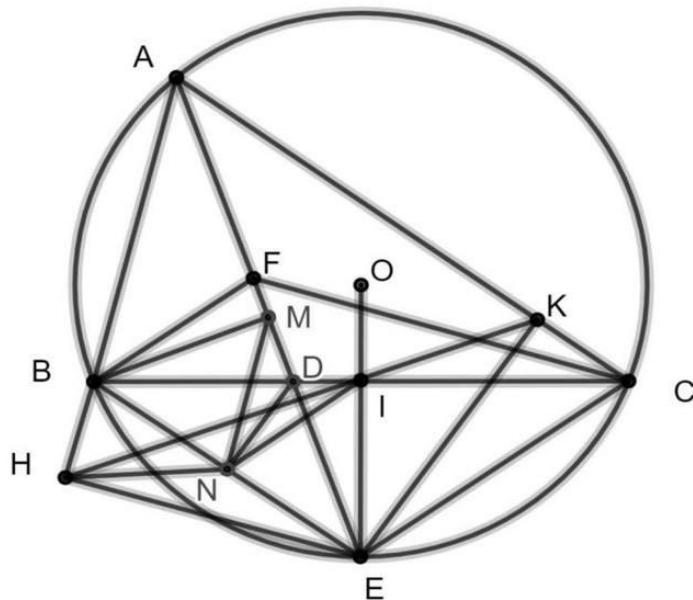
Biết rằng anh A đi 32 km phải trả tiền taxi là 479500 đồng còn chị B đi 41 km phải trả 592000 đồng. Hỏi giá cước của hãng taxi trên ở mức 2 và mức 3 là bao nhiêu? Nếu khách hàng đi 24 km thì phải trả taxi là bao nhiêu tiền?

Nội dung
Gọi giá cước của hãng taxi ở mức 2 là x đồng (ĐK $x > 0$) Gọi giá cước của hãng taxi ở mức 3 là y đồng (ĐK $y > 0$)
Anh A: Trả số tiền ở mức 2 là $(25 - 1)x = 24x$ (đồng) Trả số tiền ở mức 3 là $(32 - 25)y = 7y$ (đồng) Theo đề bài ta có phương trình: $20000 + 24x + 7y = 479500$ $24x + 7y = 459500 \quad (1)$
Chị B: Trả số tiền ở mức 2 là $(25 - 1)x = 24x$ (đồng) Trả số tiền ở mức 3 là $(41 - 25)y = 16y$ (đồng) Theo đề bài ta có phương trình: $20000 + 24x + 16y = 592000 \Leftrightarrow 24x + 16y = 572000 \quad (2)$
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 24x + 7y = 459500 \\ 24x + 16y = 572000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x + 7y = 459500 \\ 9y = 112500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15500 \\ y = 12500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK của ẩn)}$ Vậy: Giá tiền của hãng taxi ở mức 2 là 155000 đồng Giá tiền của hãng taxi ở mức 3 là 125000 đồng Nếu khách hàng đi 24km thì phải trả số tiền là: $20000 + 23.15500 = 376500$ đồng

Câu 9. (2,5 điểm) Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của (O) , A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $AC > AB$ ($A \neq B$). Gọi D là chân đường phân giác trong góc BAC ($D \in BC$). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại E . Kẻ EH , EK lần lượt vuông góc với AB và AC ($H \in AB$, $K \in AC$).

- Chứng minh $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi F là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh điểm E thuộc đường tròn (O) và E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF .
- M , N , I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE , BE và BC . Chứng minh $BMDN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm A để bốn điểm H , N , I , K thẳng hàng

Nội dung	Điểm 2,5
----------	-------------



a) Ta có:

+) $EHA = 90^\circ$ (giả thiết)

+) $EKA = 90^\circ$ (giả thiết)

Tứ giác $EHAK$, có: $EHA + EKA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi E' là giao điểm của AD với đường tròn (O) thì E' là điểm chính giữa của cung BC nhỏ.

Suy ra $OE' \perp BC$ nên $E \equiv E'$.

Vậy E thuộc đường tròn (O) .

Do $EB = EC \Rightarrow EB = EC$ (1)

Ta có:

$$BFE = BAE + ABF = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}ABC$$

$$EBF = EBC + CBF = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}ABC$$

$$\Rightarrow BFE = EBF \Rightarrow \triangle BFE \text{ cân tại } E \Rightarrow EB = EF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EB = EF = EC$

Hay E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF .

c) *) Ta có MN là đường trung bình của tam giác EAB

$$\Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow BAE = NME \quad (3)$$

$$\text{Mà } BAE = CAE = CBE \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra $CBE = NME$

Hay $NMD = NBD$ nên $BMDN$ là tứ giác nội tiếp.

*) Tứ giác $EHBI$ có $EHB = EIB = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow BIH = BEH \quad (5)$

Tương tự ta có $ECKI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow CIK = CEK \quad (6)$ Ta lại có $\triangle HEB = \triangle KEC$ (ch-cgv) Vì có: $EB = EC$ (chứng minh trên) $EH = EK$ (AE là phân giác của BAC) $\Rightarrow HEB = KEC \quad (7)$ Từ (5), (6), (7) suy ra $BIH = KIC$ Ta có $HIK = HIC + KIC = HIC + BIH = 180^\circ$ Nên H, I, K thẳng hàng. Ta có $HN = IN = \frac{BE}{2}$ (trung tuyến trong tam giác vuông) Bốn điểm H, N, I, K thẳng hàng $\Leftrightarrow H, N, I$ thẳng hàng $\Leftrightarrow BHEI$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow HBI = 90^\circ \Leftrightarrow ABC = 90^\circ \Leftrightarrow AC$ là đường kính của (O) . Vậy khi A đối xứng với C qua O thì bốn điểm H, N, I, K thẳng hàng.	
---	--

Câu 10. (0,5 điểm) Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ac + 6a^2}$$

Nội dung	Điểm 0,5
Do phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm nên ta có $a + b + c + 2023 = 0 \Rightarrow a + b + c = -2023$	
Ta có: $3a^2 - 2ab + 3b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2 - 4ab + 2b^2$ $= (a + b)^2 + 2(a - b)^2 \geq (a + b)^2$ $\Rightarrow \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} \geq \sqrt{(a + b)^2} = a + b $	
Tương tự ta có: $5b^2 - 6bc + 5c^2 = (b + c)^2 + 4(b - c)^2 \geq (b + c)^2$ $\Rightarrow \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} \geq \sqrt{(b + c)^2} = b + c $ $6c^2 - 8ac + 6a^2 = (c + a)^2 + 5(a - c)^2 \geq (a + c)^2$ $\Rightarrow \sqrt{6c^2 - 8ac + 6a^2} \geq \sqrt{(a + c)^2} = a + c $	
Suy ra: $P \geq a + b + b + c + c + a $ $\Rightarrow P \geq a + b + b + c + c + a $ $\Rightarrow P \geq a + b + b + c + c + a = 2(a + b + c) $	

$$\Rightarrow P \geq |2 \cdot (-2023)| = 4046$$

Dấu “=” xảy ra khi:

$$\begin{cases} a = b = c \\ (a+b)(b+c) \geq 0 \\ (a+b+b+c)(c+a) \geq 0 \\ a+b+c = -2023 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{-2023}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 4046 khi $a = b = c = \frac{-2023}{3}$

-----Hết-----