

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và tự luận) vào tờ giấy thi

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3,0 điểm)

Câu 1. Cho $\sqrt{x} = 6$, giá trị của x bằng

- A. 3. B. 12. C. 36. D. 6.

Câu 2. Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 5x + 2$. C. $y = -\frac{1}{3}x + 2$. D. $y = x^2$.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là

- A. $(6; 1)$. B. $(-6; -1)$. C. $(1; 6)$. D. $(6; -1)$.

Câu 4. Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^2$ và có hoành độ bằng 2. Tung độ của điểm M bằng

- A. 12. B. 6. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 5. Cho phương trình $x^2 - 2x - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Giá trị của $x_1 + x_2$ bằng

- A. 5. B. 2. C. -2. D. -5.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 10$ và $\sin \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$. Độ dài cạnh AC bằng

- A. 8. B. $\frac{50}{3}$. C. $\frac{25}{2}$. D. 6.

Câu 7. Giá trị của tham số m để đồ thị của các hàm số $y = 2x + 6$ và $y = 3x + m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung bằng

- A. -10. B. -5. C. 5. D. 1.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có nghiệm kép?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , biết $BH = 16$ và $HC = 9$. Độ dài cạnh AB bằng

- A. 16. B. 25. C. 20. D. 12.

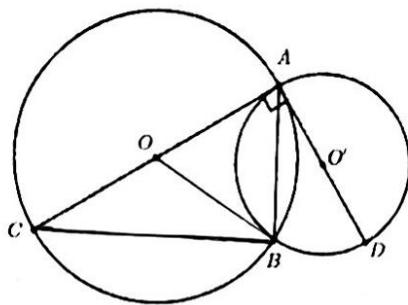
Câu 10. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ và thỏa mãn $MO = 2R$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Số đo góc $\widehat{AMB}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 75° . D. 60° .

Câu 11. Một tổ công nhân theo kế hoạch phải sản xuất 140 sản phẩm trong thời gian nhất định, mỗi ngày sản xuất số sản phẩm như nhau. Thực tế mỗi ngày tổ công nhân làm thêm được 8 sản phẩm so với kế hoạch nên hoàn thành kế hoạch sớm hơn 2 ngày. Số sản phẩm phải sản xuất mỗi ngày theo kế hoạch của tổ công nhân là

- A. 20. B. 14. C. 28. D. 10.

Câu 12. Cho hai đường tròn $(O;4)$ và $(O';3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Gọi AC, AD lần lượt là các đường kính của (O) và (O') sao cho AC, AD vuông góc với nhau như hình vẽ.



Độ dài BC bằng

A. $\frac{36}{5}$.

B. $\frac{16}{5}$.

C. 6.

D. $\frac{32}{5}$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 1 (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \frac{5\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}-1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}-2}$, với $a > 0, a \neq 1, a \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 16$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm các giá trị nguyên của a để $A.B < 0$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm giá trị của a để (P) đi qua điểm $M(1;2)$. Với a tìm được, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và đường thẳng $(d): y = 3x - 1$.

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5m + 15 \\ x + y = 3m + 9 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$. Tìm giá trị của tham số m để

biểu thức $Q = xy - 2x - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M trên cung nhỏ AC (M khác A và C). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AB với MC và MD .

a) Chứng minh rằng tứ giác $OMPD$ nội tiếp.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MB với CA và CD . Chứng minh rằng $BJ.BM = 2R^2$.

c) Chứng minh rằng tam giác AQI vuông cân.

d) Xác định vị trí điểm M để tam giác MQJ có diện tích lớn nhất.

Câu 4 (0,5 điểm). Giải phương trình: $8x^2 - 13x + 11 = \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{3}{x} \right) \sqrt{3x^2 - 2}$.

.....Hết.....



I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	A	B	D	C	B	C	D	A	D

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1:

a) Khi $a = 16$ (thỏa mãn điều kiện xác định) thì giá trị biểu thức

$$A = \frac{5\sqrt{16} + 4}{\sqrt{16} - 1} = \frac{5 \cdot 4 + 4}{4 - 1} = \frac{24}{3} = 8$$

Vậy với $a = 16$ thì $A = 8$.

b) Với $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1 - \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 2} = \frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - 2} = \frac{1}{\sqrt{a} - 2}$$

c) Với $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$ ta có:

$$A.B < 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} - 2} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 2) < 0 \text{ (vì } 5\sqrt{a} + 4 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{a} < 2 \Leftrightarrow 1 < a < 4$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{2; 3\}$

Vậy $a \in \{2; 3\}$

Câu 2:

a) Vì $M(1; 2) \in (P): y = ax^2$ nên: $a \cdot 1^2 = 2 \Leftrightarrow a = 2$

Với $a = 2 \Rightarrow (P): y = 2x^2$

PT hoành độ giao điểm của $(d), (P)$ là

$$2x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2; x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $A(1;2); B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y = 5m + 15 \\ x + y = 3m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2m + 6 \\ x + y = 3m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 2m + 6 \end{cases}$$

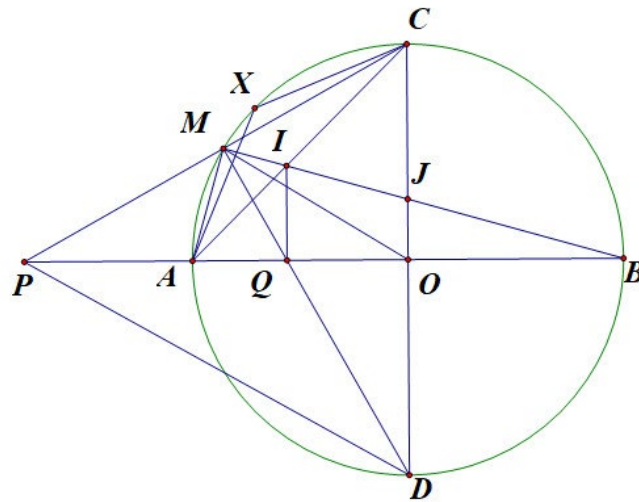
Xét

$$Q = xy - 2x - 1 = (m + 3)(2m + 6) - 2(m + 3) - 1 = 2m^2 + 10m + 11$$

$$\Rightarrow Q = 2\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min Q = -\frac{3}{2} \text{ khi } m = -\frac{5}{2}$$

Câu 3.



a) Do $AB \perp CD$ tại O nên $\widehat{POD} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$ (1)

Xét (O) có $\widehat{MCD} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp PC$ tại M $\Rightarrow \widehat{PMD} = 90^\circ$

Xét tứ giác $OMPD$ có $\widehat{POD} = \widehat{PMD} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $OMPD$ nội tiếp

b) Từ (1) $\Rightarrow \widehat{BOJ} = 90^\circ$

Xét (O) có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle BOJ$ và $\triangle BMA$ có:

$$\widehat{BOJ} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

$$\widehat{OBJ} = \widehat{MBA} \text{ (góc chung).}$$

$$\text{Do đó } \triangle BOJ \sim \triangle BMA (g.g) \Rightarrow \frac{BJ}{BO} = \frac{BA}{BM} \Rightarrow BJ.BM = BO.BA = R.2R = 2R^2.$$

c) Xét (O) có $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$ (tính chất góc nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{IMQ} = \widehat{IAQ}$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMIQ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IQA} + \widehat{AMI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IQA} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IQA} = 90^\circ$$

Xét $\triangle AOC$ có $\widehat{AOC} = 90^\circ$; $OA = OC = R \Rightarrow \triangle AOC$ vuông cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{IAQ} = 45^\circ$$

Xét $\triangle AQI$ có $\widehat{IQA} = 90^\circ$; $\widehat{IAQ} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AQI$ vuông cân tại Q

d) Tứ giác $AOJM$ nội tiếp nên $\widehat{MJC} = \widehat{MAQ}$ mà $\widehat{AMQ} = \widehat{CMB}$ (tính chất góc nội tiếp)

$$\text{Do đó } \triangle MJC \sim \triangle MAQ (g.g) \Rightarrow \frac{MJ}{MC} = \frac{MA}{MQ} \Rightarrow MJ.MQ = MA.MC$$

$$S_{MQJ} = \frac{1}{2}.MJ.MQ.\sin \widehat{MQJ} = \frac{1}{2}.MA.MC.\sin 45^\circ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(MA + MC)^2}{4}$$

Gọi X là điểm chính giữa của cung nhỏ $AC \Rightarrow MA + MC \leq XA + XC$ (không đổi)

$$S_{MQJ} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(XA + XC)^2}{4} = \frac{R^2(\sqrt{2} - 1)}{2} \text{ (không đổi)}$$

Dấu bằng xảy ra $M \equiv X \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ AC

$$\text{Vậy } \max S_{MQJ} = \frac{R^2(\sqrt{2} - 1)}{2}. \text{ Khi } M \text{ là điểm chính giữa cung nhỏ } AC$$

Câu 4. $8x^2 - 13x + 11 = \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{3}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$ (ĐKXĐ: $x \neq 0$)

PT đã cho

$$\Leftrightarrow x(8x^2 - 13x + 11) = 2 + (x + 3)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 11x = 2 + (x + 3)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow (8x^3 - 15x^2 + 6x + 1) + (x + 3)(2x - 1 - \sqrt[3]{3x^2 - 2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(8x + 1) + \frac{(x + 3)[(2x - 1)^3 - (3x^2 - 2)]}{(2x - 1)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(8x + 1) \left[1 + \frac{(x + 3)}{(2x - 1)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) \left[\frac{(x+3) + (2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) \cdot \frac{\left[\sqrt[3]{3x^2-2} + \frac{1}{2}(2x-1) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[12 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{41}{3} \right]}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} = 0$$

$$\text{Để thấy } \frac{\left[\sqrt[3]{3x^2-2} + \frac{1}{2}(2x-1) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[12 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{41}{3} \right]}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} > 0, \forall x \neq 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } (x-1)^2(8x+1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{ 1; -\frac{1}{8} \right\}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm } S = \left\{ 1; -\frac{1}{8} \right\}$$

_____HẾT_____