

Câu 1. (1,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $E = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{5}$.

b) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 0$.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là đường parabol (P) và hàm số $y = 4mx + 5$ có đồ thị là đường thẳng (d) , với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau, với (Δ) là đồ thị của hàm số $y = (5-m)x - 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 4mx_1 = 105$.

Câu 4. (1,0 điểm) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài $45m$. Tính diện tích của khu vườn, biết rằng nếu chiều dài giảm 2 lần và chiều rộng tăng 3 lần thì chu vi khu vườn không thay đổi.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa cung AB , E là điểm trên cung AM (E khác A và M). Lấy điểm F trên đoạn BE sao cho $BF = AE$. Gọi K là giao điểm của MO và BE .

a) Chứng minh rằng $EAOK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\triangle EMF$ vuông cân.

c) Hai đường thẳng AE và OM cắt nhau tại D . Chứng minh rằng $MK \cdot ED = MD \cdot EK$.

Câu 6. (0,5 điểm) Bút chì có dạng hình trụ, có đường kính đáy $8mm$ và chiều cao bằng $180mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ, phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều dài bút và đáy là hình tròn có đường kính $2mm$. Tính thể tích phần gỗ của 2024 chiếc bút chì (lấy $\pi = 3,14$).

Câu 7. (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a + 9b + 6c = 2023$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3a^2 + 63ab + 243b^2} + \sqrt{243b^2 + 378bc + 108c^2} + \sqrt{108c^2 + 42ca + 3a^2}.$$

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (1,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $E = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{5}$.

b) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

a) $E = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

b) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -3$.

c) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \cdot 2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Hệ phương trình có một nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 2: (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(x-1)^2}{4x} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{-4\sqrt{x}(x-1)}{4x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}; \end{aligned}$$

b) $A \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad (\sqrt{x} > 0, \text{ do } x > 0)$.

Kết hợp với điều kiện, ta có $0 < x < 1$ thì $A \geq 0$.

Câu 3: (1,5 điểm) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là đường parabol (P) và hàm số $y = 4mx + 5$ có đồ thị là đường thẳng (d), với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau, với (Δ) là đồ thị của hàm số $y = (5-m)x - 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 + 4mx_1 = 105$.

a) Đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau khi

$$\begin{cases} 4m = 5 - m \\ 5 \neq -3 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2 = 4mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4mx - 5 = 0 \quad (*) \text{ có}$$

Vì $ac = -5 < 0$, nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m . Do đó đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m . Theo hệ thức Vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = 4m$.

và $x_2^2 - 4mx_2 - 5 = 0$ (a). Theo giả thiết $x_2^2 + 4mx_1 = 105$ (b).

$$\text{Từ (a), (b)} \Rightarrow 4m(x_1 + x_2) = 100 \Leftrightarrow 16m^2 = 100 \Leftrightarrow m^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{5}{2}.$$

Vậy $m = \pm \frac{5}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 + 4mx_1 = 105$.

Câu 4: (1,0 điểm) Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45m. Tính diện tích của khu vườn, biết rằng nếu chiều dài giảm 2 lần và chiều rộng tăng 3 lần thì chu vi khu vườn không thay đổi.

Gọi $x(m)$ là chiều rộng khu vườn ($x > 0$).

Khi đó: Chiều dài khu vườn là $x + 45(m)$.

Chiều dài khu vườn sau khi giảm 2 lần là $\frac{x + 45}{2}(m)$.

Chiều rộng khu vườn sau khi tăng 3 lần là $3x(m)$.

Vì chu vi khu vườn không đổi, nên có phương trình: $2(x + x + 45) = 2\left(\frac{x + 45}{2} + 3x\right)$.

$$\Leftrightarrow 4x + 90 = 7x + 45 \Leftrightarrow 3x = 45 \Leftrightarrow x = 15 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy diện tích khu vườn là $15 \cdot (15 + 45) = 900(m^2)$.

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi M là điểm chính giữa cung AB, E là điểm trên cung AM (E khác A và M). Lấy điểm F trên đoạn BE sao cho $BF = AE$. Gọi K là giao điểm của MO và BE.

a) Chứng minh rằng EAOK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\triangle EMF$ vuông cân.

c) Hai đường thẳng AE và OM cắt nhau tại D. Chứng minh $MK \cdot ED = MD \cdot EK$.

a) Chứng minh rằng EAOK là tứ giác nội tiếp.

Vì $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ (gt) $\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow \widehat{AOK} = 90^\circ$.

Xét tứ giác EAOK, ta có:

$\widehat{AEK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{AOK} = 90^\circ$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{AOK} + \widehat{AEK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác EAOK là tứ giác nội tiếp.

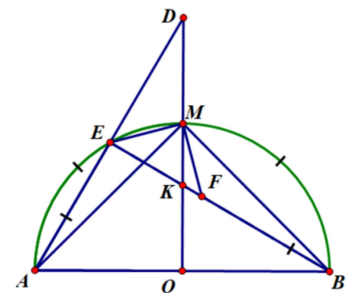
b) Chứng minh rằng $\triangle EMF$ vuông cân.

Vì $\widehat{MA} = \widehat{MB}$ (gt) $\Rightarrow MA = MB$.

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle MBF$, ta có:

$MA = MB$ (cmt), $\widehat{MAE} = \widehat{MBF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{ME}$), $AE = BF$ (gt).

Vậy $\triangle MAE = \triangle MBF$ (c-g-c) $\Rightarrow ME = MF$, $\widehat{AME} = \widehat{BMF}$.



Nên $\widehat{EMF} = \widehat{AME} + \widehat{AMF} = \widehat{BMF} + \widehat{AMF} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Xét $\triangle EMF$, ta có: $ME = MF$, $\widehat{EMF} = 90^\circ$ (cmt). Vậy $\triangle EMF$ vuông cân tại M (đpcm)

c) Chứng minh rằng $MK \cdot ED = MD \cdot EK$.

$$\widehat{AEK} = 90^\circ \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ; \widehat{BEM} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{MA} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Do đó $\widehat{BEM} = \frac{1}{2} \widehat{BED}$ nên EM là phân giác $\widehat{BED}$

Xét $\triangle DEK$, ta có EM là phân giác $\widehat{BED}$ (cmt).

$$\text{nên } \frac{MK}{MD} = \frac{EK}{ED} \Rightarrow MK \cdot ED = MD \cdot EK \text{ (đpcm)}$$

Câu 6: (0,5 điểm)

Thể tích 1 chiếc bút chì là $V_1 = \pi r_1^2 h$ (mm^3)

Thể tích lõi 1 chiếc bút chì là $V_2 = \pi r_2^2 h$ (mm^3)

Thể tích phần gỗ 1 chiếc bút chì là $V = V_1 - V_2 = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi(r_1^2 - r_2^2)h$ (mm^3)

Thể tích phần gỗ 2024 chiếc bút chì là

$$V' = 2024V = 2024\pi(r_1^2 - r_2^2)h \approx 2024 \cdot 3,14 \cdot \left[\left(\frac{8}{2} \right)^2 - \left(\frac{2}{2} \right)^2 \right] \cdot 180 = 17159472 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Câu 7: (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a + 9b + 6c = 2023$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3a^2 + 63ab + 243b^2} + \sqrt{243b^2 + 378bc + 108c^2} + \sqrt{108c^2 + 42ca + 3a^2}.$$

Đặt $x = a, y = 9b, z = 6c$ ($x, y, z > 0$) $\Rightarrow x + y + z = 2023$

$$\text{Ta có: } 3a^2 + 63ab + 243b^2 = 3x^2 + 7xy + 3y^2 = \frac{13}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \leq \frac{13}{4}(x+y)^2.$$

$$243b^2 + 378bc + 108c^2 = 3y^2 + 7yz + 3z^2 = \frac{13}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 \leq \frac{13}{4}(y+z)^2.$$

$$108c^2 + 42ca + 3a^2 = 3z^2 + 7zx + 3x^2 = \frac{13}{4}(z+x)^2 - \frac{1}{4}(z-x)^2 \leq \frac{13}{4}(z+x)^2.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq 0, \frac{1}{4}(y-z)^2 \geq 0, \frac{1}{4}(z-x)^2 \geq 0 \quad (\forall x, y, z).$$

$$\text{Do đó } P \leq \sqrt{\frac{13}{4}(x+y)^2} + \sqrt{\frac{13}{4}(y+z)^2} + \sqrt{\frac{13}{4}(z+x)^2} = \sqrt{13}(x+y+z) = 2023\sqrt{13}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 2023 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2023}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2023}{3} \\ 9b = \frac{2023}{3} \\ 6c = \frac{2023}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2023}{3} \\ b = \frac{2023}{27} \\ c = \frac{2023}{18} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = 2023\sqrt{13} \text{ khi } a = \frac{2023}{3}, b = \frac{2023}{27}, c = \frac{2023}{18}.$$