

Câu 1. (2 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0$; $x \neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tìm giá trị của P khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$.

Câu 2. (2 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - (m+3)x - 2m^2 + 3m = 0$ với m là tham số. Hãy tìm giá trị của m để $x = 3$ là nghiệm của phương trình và xác định nghiệm còn lại của phương trình (nếu có).

2. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - 2m$ với m là tham số. Tìm m để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 - x_1x_2 = 1$.

Câu 3. (1,5 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A 160 km, sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A. Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B 72 km. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 20 km/giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} > 90^\circ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng OM cắt cung nhỏ $\widehat{BC}$ tại D, cắt cung lớn $\widehat{BC}$ tại E. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ E xuống AB, H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AE.

a. Chứng minh rằng tứ giác BEHF là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh rằng $MF \perp AE$.

c. Đường thẳng MF cắt AC tại Q. Đường thẳng EC cắt AD, AB lần lượt tại I và K. Chứng minh rằng $\widehat{EQA} = 90^\circ$ và $\frac{EC}{IC} = \frac{EK}{IK}$.

Câu 5. (1 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Chứng minh rằng $abc \leq \frac{1}{8}$.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức P.

Lời giải: Ta có $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{x-1} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{x-1}$

$$P = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}. \text{ Vậy } P = \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

b. Tìm giá trị của P khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải: Khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$ thì $\sqrt{x} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$.

$$\text{Do đó } P = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}-6}{3}.$$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$.

Lời giải: Ta có $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=12 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-4 \end{cases}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-4; 5)$.

Câu 2. (2 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - (m+3)x - 2m^2 + 3m = 0$ với m là tham số. Hãy tìm giá trị của m để $x = 3$ là nghiệm của phương trình và xác định nghiệm còn lại của phương trình (nếu có).

Lời giải: $x^2 - (m+3)x - 2m^2 + 3m = 0$ (1).

Để $x = 3$ là nghiệm của phương trình (1) thì $3^2 - 3(m+3) - 2m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi $m = 0$ thì (1) trở thành $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$. Vậy nghiệm còn lại là $x = 0$.

2. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - 2m$ với m là tham số. Tìm m để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 - x_1x_2 = 1$.

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ (1).

Phương trình (1) có $\Delta = (2m+1)^2 - 4.2m = 4m^2 + 4m + 1 - 8m = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$.

Để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$ (*).

Ta có $y_1 = (2m+1)x_1 - 2m; y_2 = (2m+1)x_2 - 2m$ và theo Định lý Viét thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$.

Ta có $y_1 + y_2 - x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow (2m+1)x_1 - 2m + (2m+1)x_2 - 2m - x_1 x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow (2m+1)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2m - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) thì ta được $m = 0$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (1,5 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Một xe máy khởi hành tại địa điểm A đi đến địa điểm B cách A 160 km, sau đó 1 giờ, một ô tô đi từ B đến A. Hai xe gặp nhau tại địa điểm C cách B 72 km. Biết vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy 20 km/giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải: Gọi x (km/h) là vận tốc của xe máy ($x > 0$). Suy ra vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h).

Quãng đường ô tô đi từ B đến C là 72 km và thời gian ô tô đi từ B đến C là $\frac{72}{x+20}$ (h).

Quãng đường xe máy đi từ A đến C là $160 - 72 = 88$ km và thời gian xe máy đi từ A đến C là $\frac{88}{x}$ (h).

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 1h và hai xe gặp nhau tại C nên ta có phương trình

$$\frac{88}{x} - \frac{72}{x+20} = 1 \Leftrightarrow 88(x+20) - 72x = x(x+20) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1760 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (tm)} \\ x = -44 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là $40 + 20 = 60$ km/h.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC có $\widehat{ACB} > 90^\circ$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm BC, đường thẳng OM cắt cung nhỏ BC tại D, cắt cung lớn BC tại E. Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ E xuống AB, H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AE.

a. Chứng minh rằng tứ giác BEHF là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh rằng $MF \perp AE$.

c. Đường thẳng MF cắt AC tại Q. Đường thẳng EC cắt AD, AB lần lượt tại I và K. Chứng minh rằng $\widehat{EQA} = 90^\circ$ và $\frac{EC}{IC} = \frac{EK}{IK}$.

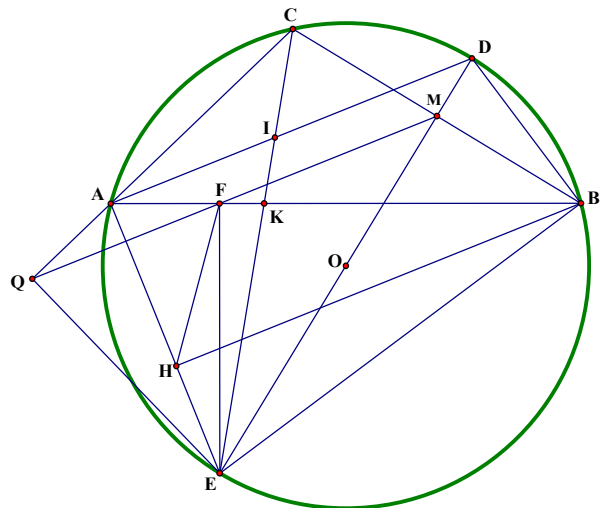
Lời giải:

a. Tứ giác BEHF có hai đỉnh H, F kề nhau cùng nhìn đoạn BE dưới một góc 90° nên nội tiếp đường tròn đường kính BE.

b. Vì M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$. Tứ giác BEFM có hai đỉnh F, M kề nhau cùng nhìn đoạn BE dưới một góc 90° nên nội tiếp đường tròn đường kính BE. Do đó $\widehat{BFM} = \widehat{BEM}$ (cùng chắn BM) (1). Ngoài ra, trong (O), ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (cùng chắn AD) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BFM} = \widehat{BAD}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AD \parallel MF$.

Ta có $\widehat{DAE} = 90^\circ$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $AD \perp AE$. Từ đó suy ra $MF \perp AE$.



c. Ta có ED là đường trung trực của BC nên $EB = EC$ (3), do đó $\widehat{CBE} = \widehat{BAE}$. Ngoài ra $\widehat{CBE} = \widehat{QAE}$ (tứ giác ACBE nội tiếp). Từ đó suy ra $\widehat{QAE} = \widehat{FAE}$. Tam giác AQF có đường cao từ A đồng thời là đường phân giác nên $\triangle AQF$ cân tại A và AE là đường trung trực của QF.

Vì $\triangle AQE = \triangle AFE$ (c.c.c) nên $\widehat{EQA} = \widehat{EFA} = 90^\circ$.

Ta có D là điểm chính giữa của $\widehat{BC}$ nên $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ hay AI là phân giác của $\triangle CAK$. Suy ra $\frac{IC}{IK} = \frac{AC}{AK}$ (4).

Vì $\triangle EKB \sim \triangle AKC$ (g.g) nên $\frac{EB}{EK} = \frac{AC}{AK}$ (5).

Từ (3), (4) và (5) ta được $\frac{EC}{EK} = \frac{IC}{IK}$ hay $\frac{EC}{IC} = \frac{EK}{IK}$.

Câu 5. (1 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Chứng minh rằng $abc \leq \frac{1}{8}$.

Lời giải: Ta có $\frac{1}{1+a} = \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$ (1).

Tương tự, ta cũng có $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$ (2) và $\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$ (3).

Nhân ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8 \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{(1+a)^2 (1+b)^2 (1+c)^2}} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} = \frac{c}{1+c} \Leftrightarrow a = b = c = 2$.