

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN-CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề.

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^4 - (m + 2)x^2 + 3m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $2022\sqrt{2022x - 2021} + \sqrt{2023x - 2022} = 2023$.
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 6xy - y^3 = 8 \\ \sqrt{2x + y + 3} + \sqrt{5x - y + 3} = -x^2 - y + 5 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^4 - x^2 + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 2y - 36 = 0$.

Câu 4 (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{b(a^2 + 1)^2}{a^2(b^2 + 1)} + \frac{c(b^2 + 1)^2}{b^2(c^2 + 1)} + \frac{a(c^2 + 1)^2}{c^2(a^2 + 1)}$$

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Lấy điểm C tùy ý trên nửa đường tròn đó (C khác A và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AC và cung BC. Hai đường thẳng AC và BN cắt nhau tại D. Hai dây cung AN và BC cắt nhau tại H.

- 1) Chứng minh tứ giác CDNH nội tiếp.
- 2) Gọi I là trung điểm DH. Chứng minh IN là tiếp tuyến của nửa đường tròn $(O; R)$.
- 3) Chứng minh rằng khi C di động trên nửa đường tròn $(O; R)$ thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.
- 4) Trên nửa đường tròn $(O; R)$ không chứa C lấy một điểm P tùy ý (P khác A và B). Gọi Q, R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB, BC, CA. Tìm vị trí của P để tổng $\frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1 (2,0 điểm)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì phương trình $x^4 - (m+2)x^2 + 3m - 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - (m+2)t + 3m - 3 = 0$ (·) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$

Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 4(3m-3) > 0 \\ m+2 > 0 \\ 3m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \text{ và } m \neq 4 \quad (*)$

Với điều kiện của m như trên, phương trình (·) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$. Giả sử rằng

$x_1 = \sqrt{t_1}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_2}, x_4 = -\sqrt{t_2}$. Khi đó

$$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 2t_1^2 + 2t_2^2 - 2t_1t_2 = 2(t_1 + t_2)^2 - 6t_1t_2$$

Theo hệ thức Viet thì $\begin{cases} t_1 + t_2 = m+2 \\ t_1t_2 = 3m-3 \end{cases}$ nên $S = 2(m+2)^2 - 6(3m-3) = 2\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{27}{2} \geq \frac{27}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy, giá trị của m để biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{27}{2}$ khi $m = \frac{5}{2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) ĐKXD: $x \geq \frac{2022}{2023}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2022(\sqrt{2022x-2021}-1) + (\sqrt{2023x-2022}-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(\frac{2022 \cdot 2022}{\sqrt{2022x-2021}+1} + \frac{1}{\sqrt{2023x-2022}+1} \right) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy: $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho

2) ĐKXD: $2x + y + 3 \geq 0; 5x - y + 3 \geq 0$

Giả sử $(x; y)$ là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 6xy - y^3 = 8 & (1) \\ \sqrt{2x+y+3} + \sqrt{5x-y+3} = -x^2 - y + 5 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} pt(1) \Leftrightarrow x^3 + (-y)^3 + (-2)^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-2) &= 0 \Leftrightarrow (x-y-2) \left(\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= y+2 \text{ hoặc } x = -y = -2 \text{ (Không thỏa đkxd)} \end{aligned}$$

Với $x = y+2$, thế vào pt(2) ta được

$$\sqrt{3y+7}-2 + \sqrt{4y+13}-3 = -y^2-5y-4 \Leftrightarrow (y+1) \left(\frac{3}{\sqrt{3y+7}-2} + \frac{4}{\sqrt{4y+13}+3} + y+4 \right) = 0$$

Vì $y+4 > 0$ (đk để căn xác định) nên $y = -1 \Rightarrow x = 1$

Vậy: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Giả sử n, k là hai số tự nhiên sao cho $n^4 + 4^{2k+1} = p$ với p là số nguyên tố hay

$$\begin{aligned} p &= n^4 + 2 \cdot 2^{2k+1} \cdot n^2 + (2^{2k+1})^2 - (n \cdot 2^{k+1})^2 \Leftrightarrow p = (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n \cdot 2^{k+1})^2 \\ &\Leftrightarrow p = (n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1})(n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1}) \end{aligned}$$

Để p là số nguyên tố thì ta phải có $n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1} = 1$ nên $1 \geq (\sqrt{2}-1) \cdot n \cdot 2^{k+1}$ hay $n \cdot 2^{k+1} \leq 2$

Từ k, n là các số tự nhiên nên ta được $n=1; k=0$ lúc này $n^4 + 4^{2k+1} = 5$ là số nguyên tố

Vậy: $(k; n) = (0; 1)$ là tất cả bộ số cần tìm

2) Phương trình đã cho tương đương với $(x^2 + y - 1)^2 + (x - y)^2 = 37 = 6^2 + 1^2 = 1^2 + 6^2$
Xét hai trường hợp

- *) TH₁: $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 6 \\ x - y = 1 \text{ hoặc } x - y = -1 \end{cases}$ và do x, y nguyên dương nên ta thu được $x = 2, y = 3$.
- *) TH₂: $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 1 \\ x - y = 6 \text{ hoặc } x - y = -6 \end{cases}$ và hệ vô nghiệm (x, y) nguyên dương
- Vậy: Các bộ số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 4 (1,0 điểm) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta có:

$$P \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b(a^2+1)^2}{a^2(b^2+1)} \cdot \frac{c(b^2+1)^2}{b^2(c^2+1)} \cdot \frac{a(c^2+1)^2}{c^2(a^2+1)}} = 3 \sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{abc}}$$

Để ý rằng

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq t^2 + 3\sqrt[3]{t^2} + 3\sqrt[3]{t^4} + 1 = (\sqrt[3]{t^2} + 1)^3$$

(Trong đó $abc = t > 0$) do đó:

$$P \geq 3 \cdot \frac{\sqrt[3]{t^2} + 1}{\sqrt[3]{t}} = 3 \left(\frac{9}{4} \sqrt[3]{t} + \frac{1}{\sqrt[3]{t}} \right) - \frac{3.5}{4} \sqrt[3]{t} \geq 3.2 \cdot \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3.5}{4} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{13}{2}$$

(Bởi vì $2 \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{t}$ nên $\sqrt[3]{t} \leq \frac{2}{3}$)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{13}{2}$.

Câu 5 (3,0 điểm)

- 1) Tứ giác CDNH có $\angle ACH = \angle DNH = 90^\circ$ (gnt chắn nửa đường tròn) nên nội tiếp
- 2) Để ý rằng I là trung điểm DH nên I cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CHND nên $\angle INA = \angle INH = 90^\circ - \angle HDN = \angle NBA$ (Do H là trực tâm $\triangle DAB$) nên IN là tiếp tuyến của (O)
- 3) Hạ $OK \perp MN$ tại K. Khi đó: $OK = OM \cdot \cos(\angle MOK) = R \cdot \cos\left(\frac{\angle MON}{2}\right) = R \cdot \cos(45^\circ)$ cố định nên MN tiếp xúc với đường tròn (O; OK) cố định
- 4) Ta có $P = \frac{AB}{PQ} + \frac{BC}{PR} + \frac{CA}{PS} = \frac{AB^2}{PQ \cdot AB} + \frac{BC^2}{PR \cdot BC} + \frac{CA^2}{PS \cdot CA} = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{BC^2}{PB \cdot PC \cdot \sin(\angle BPC)} + \frac{CA^2}{PC \cdot PA \cdot \sin(\angle APC)}$

$$= \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{BC^2}{PB \cdot PC \cdot \sin(\angle BAC)} + \frac{CA^2}{PC \cdot PA \cdot \sin(\angle ABC)} = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB \cdot AC}{PC \cdot PB} + \frac{AB \cdot BC}{PC \cdot PA}$$

Mặt khác, theo định lí Ptolemy thì $PC \cdot AB = PB \cdot AC + PA \cdot BC$ nên

$$P = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB \cdot (AC \cdot PB + BC \cdot PA)}{PA \cdot PB \cdot PC} = \frac{AB^2}{PA \cdot PB} + \frac{AB^2}{PA \cdot PB} \geq 2 \cdot \frac{2 \cdot AB^2}{PA^2 + PB^2} = 4$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi P là điểm chính giữa cung AB không chứa C.

