

Câu 1. (1,0 điểm)

Cho biểu thức $P = (\sqrt{x} + 1) \left(1 - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$).

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Chứng minh $P \geq 2$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 - y^2} = \frac{18}{5} \\ \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Giải phương trình $x^2 - x + 2\sqrt{x^3 + 1} = 2\sqrt{x + 1}$.

Câu 4. (1,0 điểm)

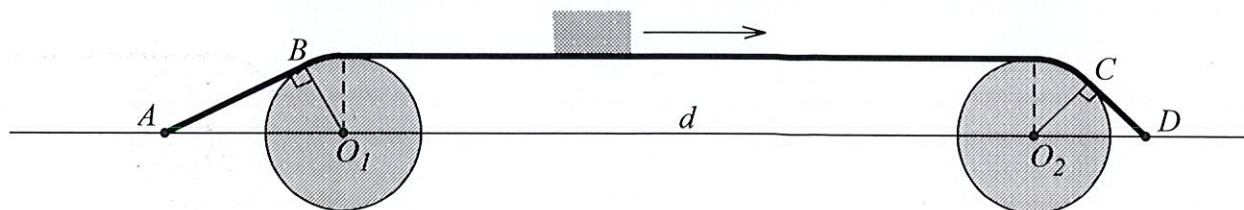
Cho phương trình $x^2 - mx - m^2 + m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1| - |x_2| = 2$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Hai bạn A và B photo một số tài liệu của mỗi bạn ở hai nơi với giá khác nhau. Biết tổng số tờ hai bạn photo là 400 tờ, số tiền bạn A phải trả là 55000 đồng, số tiền bạn B phải trả là 36000 đồng, nơi bạn B photo rẻ hơn nơi bạn A là 50 đồng một tờ. Hỏi bạn A photo bao nhiêu tờ, bạn B photo bao nhiêu tờ?

Câu 6. (1,0 điểm)

Một hệ thống băng chuyền được minh họa như hình vẽ. Biết rằng hai con lăn là hai đường tròn $(O_1; R)$, $(O_2; R)$ có bán kính bằng nhau, tâm nằm trên phương ngang d , đoạn băng chuyền là đường tô đậm từ A đến D (A và D thuộc d), AB là tiếp tuyến đường tròn (O_1) , DC là tiếp tuyến đường tròn (O_2) , $O_1O_2 = 3m$, $R = 0,2m$, $\widehat{O_1AB} = 30^\circ$, $\widehat{O_2DC} = 45^\circ$. Tính chiều dài đoạn băng chuyền (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).



Câu 7. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O và dây AB không đi qua O . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB , D là một điểm thay đổi trên cung lớn AB (D khác A và B), DM cắt AB tại C .

- 1) Chứng minh $MB \cdot BD = MD \cdot BC$.
- 2) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Chứng minh MB là tiếp tuyến đường tròn (J).
- 3) Chứng minh tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD không đổi.

Câu 8. (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh $a^7 + b^7 + c^7 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 6$.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký CBCT1: _____

Chữ ký CBCT2: _____

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho biểu thức $P = (\sqrt{x} + 1) \left(1 - \frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$).	1,0
1) Rút gọn biểu thức P	0,5
$P = (\sqrt{x} + 1) \frac{x + 1}{x + \sqrt{x}}$	0,25
$P = (\sqrt{x} + 1) \frac{x + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$	0,25
2) Chứng minh $P \geq 2$.	0,5
$P = \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0,25
$P \geq 2$	0,25

Câu 2. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \frac{x}{x^2 - y^2} = \frac{18}{5} \\ \frac{y}{x^2 - y^2} = \frac{12}{5} \end{cases}$	1,0
Điều kiện $x^2 - y^2 \neq 0$	0,25
Hệ trở thành $\begin{cases} \frac{x + y}{x^2 - y^2} = 6 \\ \frac{x - y}{x^2 - y^2} = \frac{6}{5} \end{cases}$	0,25

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-y} = 6 \\ \frac{1}{x+y} = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \frac{1}{6} \\ x+y = \frac{5}{6} \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$	0,25

Câu 3. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Giải phương trình: $x^2 - x + 2\sqrt{x^3 + 1} = 2\sqrt{x+1}$	1,0
Điều kiện $x \geq -1$	0,25
$x^2 - x + 2\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt{x+1}$ Đặt $u = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $v = \sqrt{x+1}$ ($u > 0; v \geq 0$) Ta có phương trình $u^2 - 1 + 2uv = 2v$ $(u-1)(u+1+2v) = 0 \Leftrightarrow u-1=0$ (vì $u+1+2v > 0$)	0,25
Với $u-1=0$, ta có $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ (thỏa điều kiện) Vậy phương trình có nghiệm: $x=0; x=1$	0,25

Câu 4. (1,0 điểm)

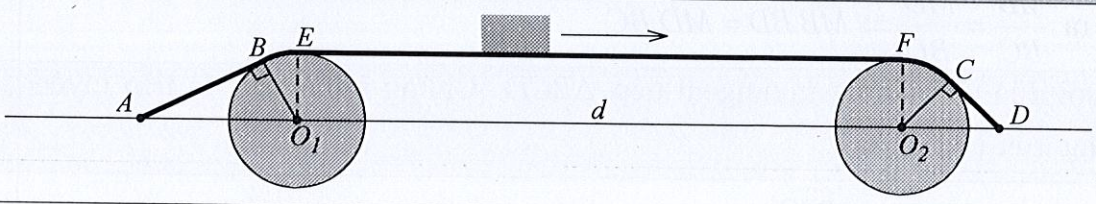
NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho phương trình $x^2 - mx - m^2 + m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $ x_1 - x_2 = 2$.	1,0
$\Delta = 5m^2 - 4m + 16 = 4m^2 + (m-2)^2 + 12 > 0 \quad \forall m$	0,25
$ x_1 - x_2 = 2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1x_2 = 4 (*)$	0,25
Mà $x_1x_2 = -m^2 + m - 4 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4} < 0 \quad \forall m$	0,25
$(*) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 = 4 \Rightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (thỏa điều kiện đề bài). Vậy: $m = -2; m = 2$	0,25

Câu 5. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Hai bạn A và B photo một số tài liệu của mỗi bạn ở hai nơi với giá khác nhau. Biết tổng số tờ hai bạn photo là 400 tờ, số tiền bạn A phải trả là 55000	1,0

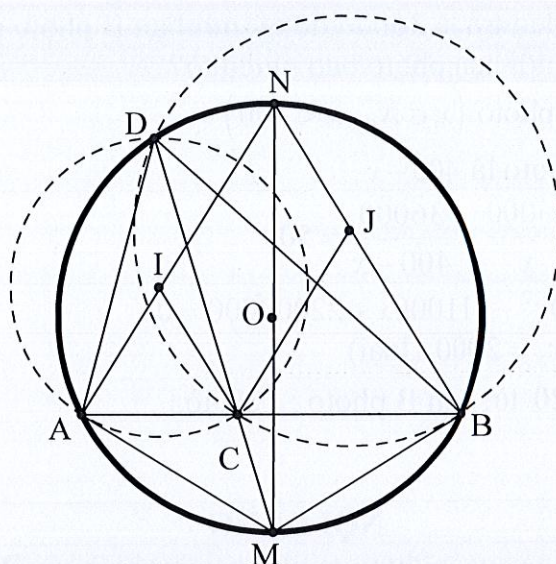
đồng, số tiền bạn B phải trả là 36000 đồng, nơi bạn B photo rẻ hơn nơi bạn A là 50 đồng một tờ. Hỏi mỗi bạn photo bao nhiêu tờ?	
Gọi x là số tờ bạn A photo ($x \in \mathbb{N}^*, x < 400$) Khi đó số tờ bạn B photo là $400 - x$	0,25
Ta có phương trình $\frac{55000}{x} - \frac{36000}{400 - x} = 50$	0,25
Giải phương trình $50x^2 - 111000x + 22000000 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 220$ (nhận); $x_2 = 2000$ (loại)	0,25
Vậy bạn A photo : 220 tờ; bạn B photo : 180 tờ	0,25

Câu 6. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Một hệ thống băng chuyền được minh họa như hình vẽ. Biết rằng hai con lăn là hai đường tròn $(O_1; R)$, $(O_2; R)$ có bán kính bằng nhau, tâm nằm trên phương ngang d , đoạn băng chuyền là đường tô đậm từ A đến D (A và D thuộc d), AB là tiếp tuyến đường tròn (O_1) , DC là tiếp tuyến đường tròn (O_2) , $O_1O_2 = 3m$, $R = 0,2m$, $\widehat{O_1AB} = 30^\circ$, $\widehat{O_2DC} = 45^\circ$. Tính chiều dài đoạn băng chuyền (lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).	1,0
	
$AB = \frac{R}{\tan 30^\circ} = R\sqrt{3}$ $CD = \frac{R}{\tan 45^\circ} = R$	0,25
Gọi E, F là hai tiếp điểm như hình vẽ Độ dài $\widehat{BE} = \frac{\pi \cdot R}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \cdot R$ Độ dài $\widehat{FC} = \frac{\pi \cdot R}{180^\circ} \cdot 45^\circ = \frac{\pi}{4} \cdot R$	0,25
Chiều dài đoạn băng chuyền : $l = AB + \widehat{BE} + EF + \widehat{FC} + CD$	0,25
Vậy chiều dài đoạn băng chuyền $l = \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot 0,2 + 3 \approx 3,8m$	0,25

Câu 7. (3,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho đường tròn tâm O và dây AB không đi qua O . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB , D là một điểm thay đổi trên cung lớn AB (D khác A và B), DM cắt AB tại C .	3,0



1) Chứng minh $MB.BD = MD.BC$.	1,0
Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ có $\widehat{BMC} = \widehat{BMD}$ ($\widehat{M}$ chung)	0,25
$\widehat{MBC} = \widehat{BDM}$ ($\widehat{AM} = \widehat{BM}$)	0,25
Vậy $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ đồng dạng	0,25
Suy ra $\frac{MB}{BC} = \frac{MD}{BD} \Rightarrow MB.BD = MD.BC$	0,25
2) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$. Chứng minh MB là tiếp tuyến đường tròn (J)	1,0
Ta có $\widehat{MBC} = \widehat{BDC} = \frac{\widehat{BJC}}{2}$ (1)	0,25
$\triangle BJC$ cân tại J , suy ra $\widehat{JBC} + \frac{\widehat{BJC}}{2} = 90^\circ$ (2)	0,25
(1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{JBC} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp BJ$	0,25
Vậy MB là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .	0,25
3) Chứng minh tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD không đổi.	1,0
Gọi MN là đường kính của đường tròn (O), suy ra J thuộc NB	0,25
Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$, chứng minh tương tự I thuộc AN	0,25
Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ADB} = 2\widehat{BDM} = \widehat{BJC} \Rightarrow CJ \parallel IN$	0,25
Chứng minh tương tự: $CI \parallel JN$, suy ra tứ giác $CINJ$ là hình bình hành	0,25
Suy ra $R_{(I)} + R_{(J)} = IC + JB = NJ + JB = NB$ (không đổi)	0,25

Câu 8. (1,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.	1,0

Chứng minh rằng : $a^7 + b^7 + c^7 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 6$.	
Áp dụng BĐT Cô-si ta có : $a^7 + \frac{1}{a^3} \geq 2\sqrt{a^7 \cdot \frac{1}{a^3}} = 2a^2$ Tương tự ta có : $b^7 + \frac{1}{b^3} \geq 2\sqrt{b^7 \cdot \frac{1}{b^3}} = 2b^2$; $c^7 + \frac{1}{c^3} \geq 2\sqrt{c^7 \cdot \frac{1}{c^3}} = 2c^2$	0,25
Suy ra $VT = a^7 + b^7 + c^7 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$	0,25
Áp dụng BĐT Cô-si cho : $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$	0,25
Ta có $VT \geq 2[(a^2 + 1) + (b^2 + 1) + (c^2 + 1)] - 6 \geq 4(a + b + c) - 6 = 12$ Suy ra $a^7 + b^7 + c^7 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 6$.	0,25

--- HẾT ---

