

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(1-x)^2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{2x-5} = 0$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + x - 2 = 0 \\ 4y^2 + x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x+y)(2x+3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm).

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3y(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x+y+z)} - (x^2 + z^2)$.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O và có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC .

a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với EF và IJ song song với OA .

b) Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của EF với BC và AD . Chứng minh rằng $\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF}$.

c) Đường thẳng chứa tia phân giác của $\widehat{FHB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Tia phân giác của $\widehat{CAB}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm P khác A . Chứng minh ba điểm H, P, J thẳng hàng.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC cố định có diện tích S . Đường thẳng d thay đổi đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABN và ACM . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_1 + S_2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right] : \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(1-x)^2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 - (x-1)\sqrt{2x-5} = 0$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + x - 2 = 0 \\ 4y^2 + x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời Giải:

a) $P = \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \frac{(x-1)^2}{2(\sqrt{x}-1)} = \frac{(-2\sqrt{x})(x-1)^2}{2(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2} = -\sqrt{x}$.

b) Điều kiện : $x \geq \frac{5}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)(x-2-\sqrt{2x-5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0(1) \\ x-2=\sqrt{2x-5}(2) \end{cases}$.

(1) $\Leftrightarrow x=1$ (không thỏa mãn điều kiện).

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)^2 = 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{3\}$.

c) Cộng hai phương trình đã cho theo vế được

$$(x+2y)^2 + 2(x+2y) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=-3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x+2y=1 \Leftrightarrow x=1-2y$ thay vào phương trình sau của hệ thu được

$$4y^2 + 1 - 2y + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $x+2y=-3 \Leftrightarrow x=-2y-3$ thay vào phương trình sau của hệ thu được

$$4y^2 - 3 - 2y + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm

$$(1;0); \left(2; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right); \left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right).$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{ac}{b+d} \geq 2$. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(x+y)(2x+3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$.

Lời Giải:

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b = 0(1) \\ x^2 + cx + d = 0(2) \end{cases}$.

Ta có $\Delta_1 = a^2 - 4b$ và $\Delta_2 = c^2 - 4d$

Giả sử phương trình này vô nghiệm, khi đó cả hai phương trình (1), (2) đều vô nghiệm. Tức là $\begin{cases} \Delta(1) < 0 \\ \Delta(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b > a^2 \\ 4d > c^2 \end{cases} \Rightarrow b > 0; d > 0 \Rightarrow b + d > 0$.

Lúc này theo giả thiết thì $\frac{ac}{b+d} \geq 2 \Rightarrow ac \geq 2(b+d)$.

Tuy nhiên điều này vô lý do $2(b+d) > \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \geq ac$.

Vậy với điều kiện đề cho thì pt $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0$ luôn có nghiệm

b/ Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = 2x + 3y \end{cases}$

Khi đó $2x + y + 2 = 4x + 4y - 2x - 3y + 2$

$$= 4(x+y) - (2x+3y) + 2 = 4a - b + 2$$

Ta có

$$(x+y)(2x+3y)^2 + 2x + y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab^2 + 4a - b + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b^2 + 4) = b - 2$$

$$\Rightarrow b - 2 : b^2 + 4$$

$$\Rightarrow (b-2)(b+2) : (b^2 + 4)$$

$$\Rightarrow (b^2 + 4) - (b-2)(b+2) : (b^2 + 4)$$

$$\Rightarrow 8 : (b^2 + 4)$$

$$\Rightarrow (b^2 + 4) \in \{4, 8\}$$

$$\text{Nếu } b^2 + 4 = 4 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } b^2 + 4 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 0 \\ b = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$*) b = 2 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$*) b = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $(-2; 2)$ thỏa mãn pt đã cho

Câu 3 (1,0 điểm).

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3y(x + z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(x + y + z)} - (x^2 + z^2)$.

Lời Giải:

$$\text{Ta có : } 3y(x + z) = 2y^2 + 2(x^2 + z^2) \geq 2y^2 + (x + z)^2$$

$$\Rightarrow 3y(x + z) \geq 2y^2 + (x + z)^2$$

$$\Rightarrow (x + z)^2 - 3y(x + z) + 2y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+z}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x+z}{y}\right) + 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{x+z}{y} \leq 2.$$

Do đó :

$$P \leq \sqrt{4(x+z)} - x^2 - z^2 = 2\sqrt{x+z} - x^2 - z^2 \leq x+z+1 - x^2 - z^2 = \frac{3}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x = z = \frac{1}{2}; y = 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3}{2}$.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O và có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và BC .

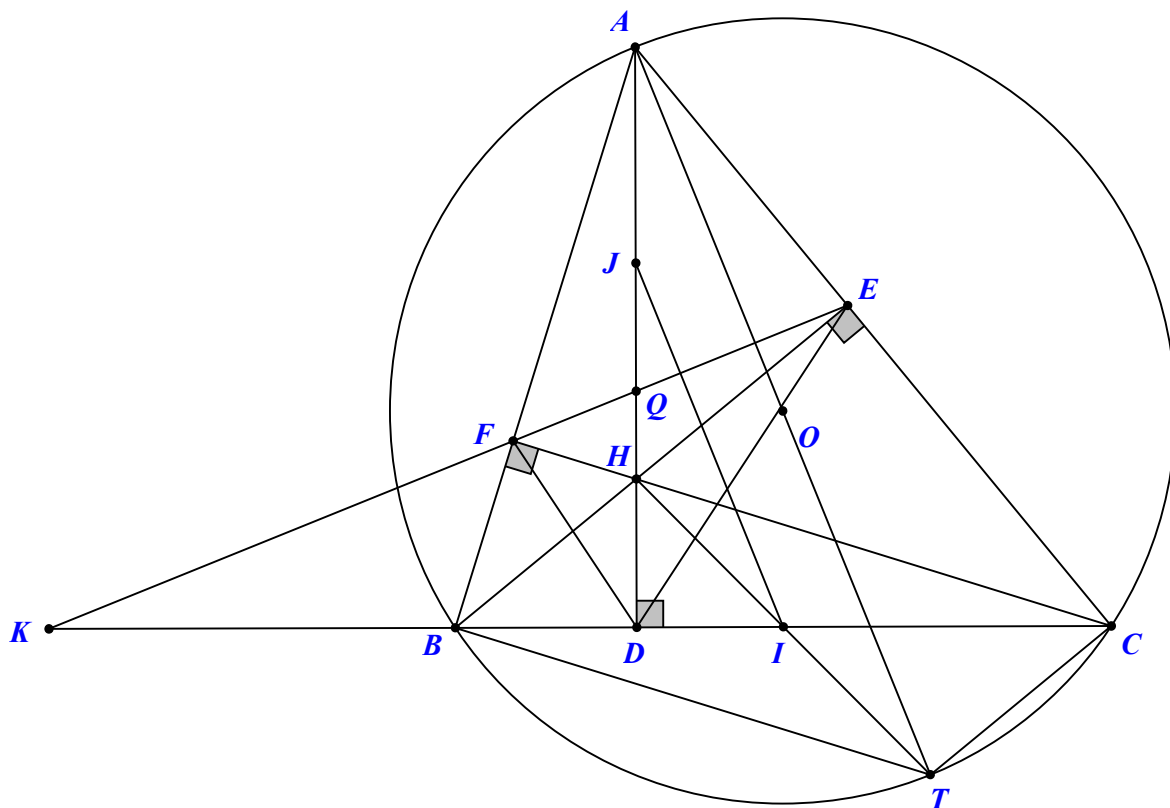
a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với EF và IJ song song với OA .

b) Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của EF với BC và AD . Chứng minh rằng

$$\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF}.$$

c) Đường thẳng chứa tia phân giác của $\widehat{FHB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Tia phân giác của $\widehat{CAB}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm P khác A . Chứng minh ba điểm H, P, J thẳng hàng.

Lời Giải:



a) $IE = IF = \frac{1}{2} BC; JE = JF = \frac{1}{2} AH$

$\Rightarrow IJ$ là đường trung trực của EF .

$\Rightarrow IJ \perp EF$

Kẻ đường kính AT của (O)

$\Rightarrow BHCT$ là hình bình hành

$\Rightarrow I$ là trung điểm của HT .

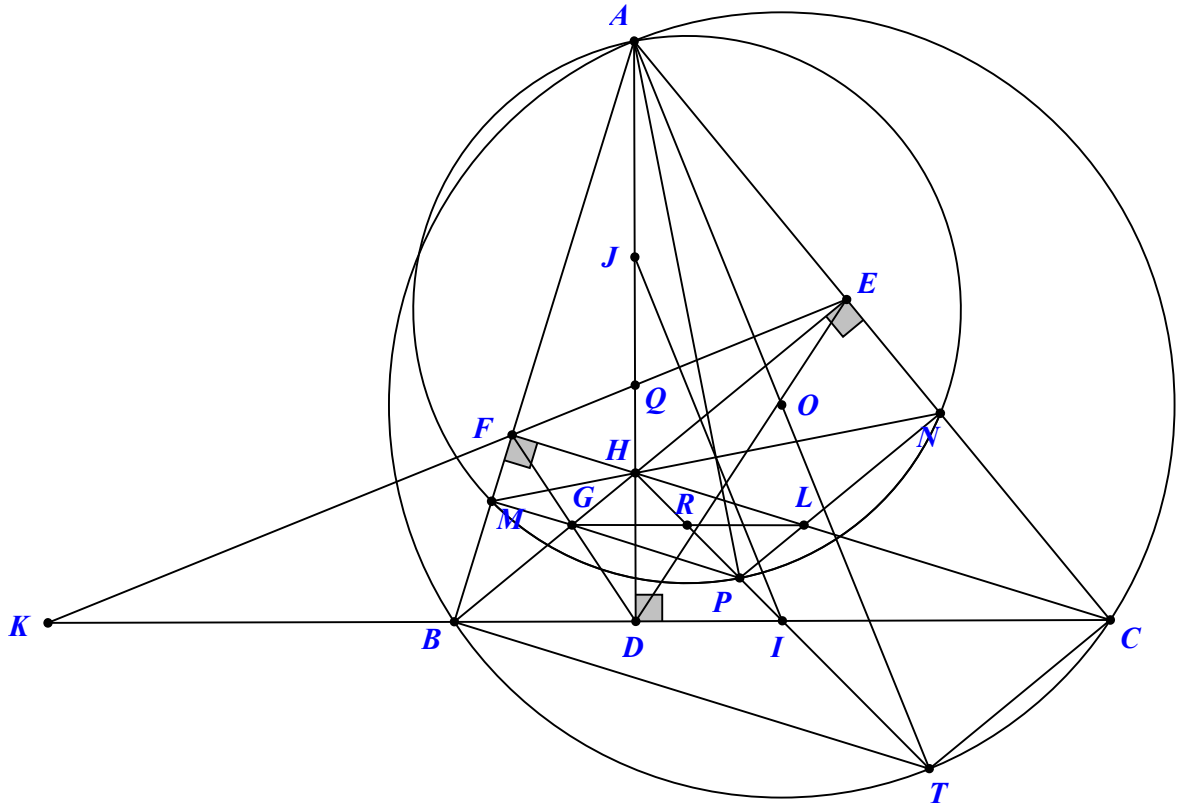
$\Rightarrow IJ \parallel AT$

b) Các tứ giác $BDHF, CDHE, BCEF$ là các tứ giác nội tiếp nên ta có

$$\widehat{EDH} = \widehat{HCE} = \widehat{HBF} = \widehat{HDF}$$

và do $HD \perp HK \Rightarrow DQ, DK$ là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác DEF .

Đến đây theo tính chất đường phân giác thì $\frac{QE}{QF} = \frac{KE}{KF} \left(= \frac{DE}{DF} \right)$.



c) Ta có $\widehat{AMH} = \widehat{MBH} + \widehat{MHB} = \widehat{NCH} + \widehat{NHC} = \widehat{HNA}$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

$\Rightarrow AP$ là đường kính của (AMN)

$\Rightarrow PM \parallel HC, PN \parallel HB$.

Gọi G là giao điểm của PM, HB và L là giao điểm của PN, HC .

Khi đó tứ giác $HGPL$ là hình bình hành

nên HP đi qua trung điểm R của GL .

Đến đây sử dụng định lý Talet và tính chất đường phân giác ta được

$$\frac{GH}{GB} = \frac{MF}{MB} = \frac{HF}{HB};$$

$$\frac{LH}{LC} = \frac{NE}{NC} = \frac{HE}{HC}.$$

Tuy nhiên hai tam giác HFB, HEC đồng dạng nên $\frac{HF}{HB} = \frac{HE}{HC}$.

$$\Rightarrow \frac{GH}{GB} = \frac{LH}{LC} \Rightarrow GL \parallel BC$$

Cho HR cắt BC tại I'

$$\text{sử dụng định lý Talet thì } \frac{RG}{I'B} = \frac{AR}{AI'} = \frac{RL}{I'C}$$

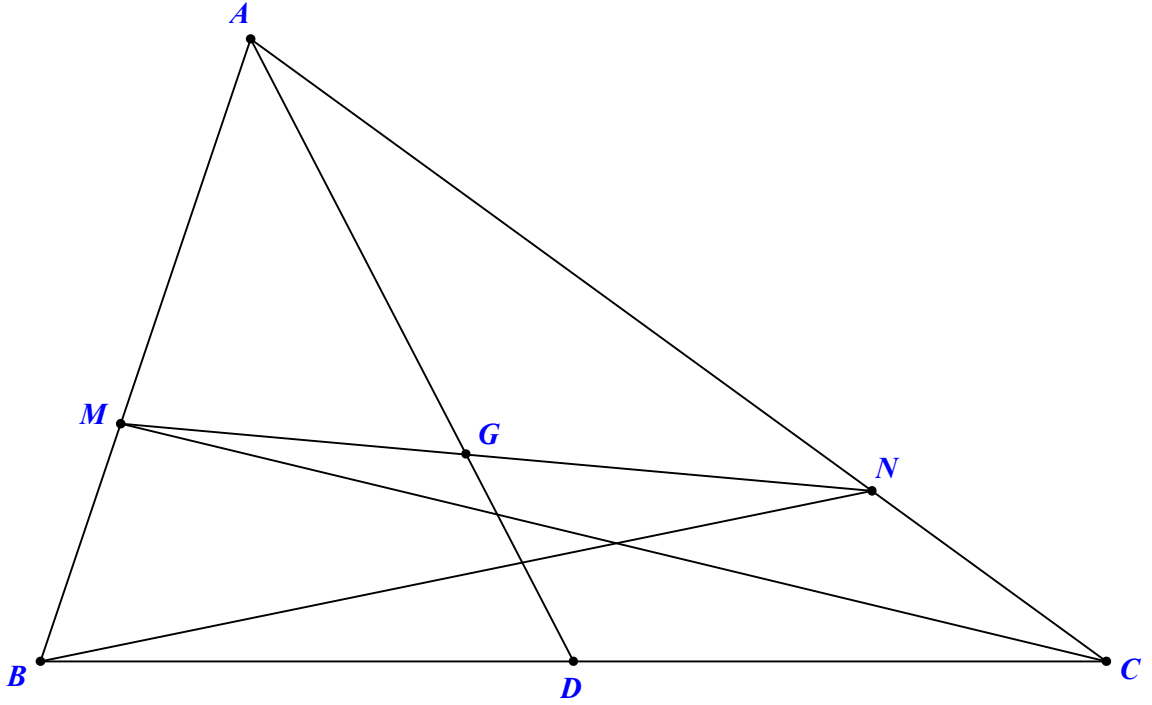
$$\Rightarrow I'B = I'C \Rightarrow I' \equiv I.$$

Vậy ba điểm H, P, I thẳng hàng.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC cố định có diện tích S . Đường thẳng d thay đổi đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N , Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABN và ACM . Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_1 + S_2$.

Lời Giải:



Gọi D là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\text{Ta có : } \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{S_{AMN}}{S} = \frac{S_{AMG} + S_{ANG}}{S}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AMG}}{S_{ABD}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{ANG}}{S_{ACD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AG}{AD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AG}{AD} = \frac{1}{3} \left(\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$$

$$\text{Mà } \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{S_{ABN} + S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{AN}{AC} + \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{S_1 + S_2}{S} = \left(\frac{AN}{AC} + \frac{AM}{AB} \right) \left(\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} \right) \geq 4$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 \geq \frac{4}{3} S.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow d \parallel BC.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S_1 + S_2$ là $\frac{4}{3}S$, đạt được khi và chỉ khi $d \parallel BC$.