

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Thực hiện phép tính: $2\sqrt{9} - 3\sqrt{4}$.

2. Rút gọn biểu thức: $\sqrt{\frac{28(a-2)^2}{7}}$, với $a > 2$.

3. Tìm tọa độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x - 2$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 2x + m - 1 = 0$, với m là tham số.

1. Giải phương trình với $m = 1$.

2. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 = 4(m - m^2)$.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người thợ cùng làm một công việc trong 9 ngày thì xong. Mỗi ngày, lượng công việc của người thứ hai làm được nhiều gấp ba lần lượng công việc của người thứ nhất. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm xong công việc đó trong bao nhiêu ngày?

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm thuộc cung nhỏ BC (E không trùng với B và C), tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại E cắt đường thẳng AB tại I . Gọi F là giao điểm của DE và AB , K là điểm thuộc đường thẳng IE sao cho KF vuông góc với AB .

a. Chứng minh tứ giác $OKEF$ nội tiếp.

b. Chứng minh $\widehat{OKF} = \widehat{ODF}$.

c. Chứng minh $DE \cdot DF = 2R^2$.

d. Gọi M là giao điểm của OK với CF , tính $\tan \widehat{MDC}$ khi $\widehat{EIB} = 45^\circ$.

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2019}{xy + yz + zx}$.

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:
Chữ ký của giám thị 1: Chữ ký của giám thị 2:

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ BIỂU ĐIỂM DỰ KIẾN:

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0đ)	1	$2\sqrt{9} - 3\sqrt{4} = 2.3 - 3.2 = 6 - 6 = 0$	0.5
	2	Với $a > 2$, ta có: $\sqrt{\frac{28(a-2)^2}{7}} = \sqrt{4(a-2)^2} = 2 a-2 = 2(a-2)$	0.5
	3	Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ Giải phương trình được $x_1 = 1; x_2 = 2$ Với $x = 1$ thì $y = 1^2 = 1$ Với $x = 2$ thì $y = 2^2 = 4$ Vậy tọa độ các giao điểm của hai đồ thị là (1; 1) và (2; 4).	1.0
Câu 2 (2,0đ)	1	Với $m = 1$, ta có phương trình: $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ Vậy với $m = 1$, phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -2\}$	0.5
	2	Phương trình $x^2 + 2x + m - 1 = 0$ Xét $\Delta' = 1 - (m - 1) = 2 - m$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$ Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$ Theo đề bài: $x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2 = 4(m - m^2)$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 6x_1 x_2 = 4(m - m^2)$ $\Rightarrow (-2)^3 - 3(m - 1).(-2) - 6(m - 1) = 4(m - m^2)$ $\Leftrightarrow -8 + 6m - 6 - 6m + 6 = 4(m - m^2)$ $\Leftrightarrow -8 = 4(m - m^2)$ $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$ Giải phương trình trên được: $m_1 = -1$ (TMĐK), $m_2 = 2$ (loại) Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.	1.5
Câu 3 (2,0đ)		Gọi thời gian người thợ thứ nhất và người thợ thứ hai làm một mình xong việc lần lượt là x (ngày) và y (ngày). ĐK: x, y > 9. Mỗi ngày: người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc, hai người cùng làm được $\frac{1}{9}$ công việc.	2.0

		Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ (1) Vì mỗi ngày, lượng công việc của người thứ hai làm được nhiều gấp ba lần lượng công việc của người thứ nhất nên ta có phương trình: $\frac{1}{y} = \frac{3}{x} \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 12 \end{cases}$ Vậy nếu làm một mình thì người thợ thứ nhất cần 36 ngày, người thợ thứ hai cần 12 ngày để làm xong công việc.	
Câu 4 (3,5đ)			0.25
	a	Tứ giác OKEF có: $\widehat{OEK} = 90^\circ$ (EK là tiếp tuyến của (O)) $\widehat{OFK} = 90^\circ$ (KF $\perp$ AB) $\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OFK} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ OKEF là tứ giác nội tiếp.	0.75
	b	OKEF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{E_1}$ ΔODE cân tại O (OD = OE = R) $\Rightarrow \widehat{ODF} = \widehat{E_1}$ Do đó $\widehat{K_1} = \widehat{ODF}$ (đpcm).	0.75
	c	Ta có $\widehat{DEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ΔDOF và ΔDEC có: $\widehat{ODF}$ chung ; $\widehat{DOF} = \widehat{DEC} = 90^\circ$ $\Rightarrow \Delta DOF \simeq \Delta DEC$ (g-g)	0.75

		$\Rightarrow \frac{DO}{DE} = \frac{DF}{DC}$ $\Rightarrow DE \cdot DF = DO \cdot DC = R \cdot 2R = 2R^2$	
	d	Ta có: $\widehat{EIB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EOB} = 45^\circ$ $\Rightarrow E$ là điểm chính giữa của cung BC $\Rightarrow DF$ là tia phân giác của $\widehat{ODB}$ Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác, ta có: $\frac{OF}{FB} = \frac{OD}{BD}$ $\Rightarrow \frac{OF}{OD} = \frac{FB}{BD} = \frac{OF + FB}{OD + BD} = \frac{OB}{OD + BD}$ $\Rightarrow \frac{OF}{R} = \frac{R}{R + R\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ (Vì $\triangle OBD$ vuông cân tại O nên $BD = OB\sqrt{2} = R\sqrt{2}$) $\Rightarrow OF = R(\sqrt{2} - 1)$ Dễ thấy $\widehat{C_1} = \widehat{K_1}$ ($= \widehat{ODF}$) $\Rightarrow OCKF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CKF} + \widehat{COF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CKF} = 90^\circ$ $\Rightarrow OCKF$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) $\Rightarrow M$ là trung điểm của CF Vẽ $MH \perp OC \Rightarrow H$ là trung điểm của OC $\Rightarrow HM$ là đường trung bình của $\triangle COF$ $\Rightarrow HM = \frac{1}{2}OF = \frac{R(\sqrt{2} - 1)}{2}$ Lại có $HD = OH + OD = \frac{3}{2}R$ $\Rightarrow \tan \widehat{MDC} = \tan \widehat{MDH} = \frac{HM}{HD} = \frac{R(\sqrt{2} - 1)}{\frac{3}{2}R} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$	1.0
Câu 5 (0,5đ)		$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2019}{xy + yz + zx}$ $= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{2017}{xy + yz + zx}$ Ta có: $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ $= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$ $\Rightarrow 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ Với $a, b, c > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:	1.0

		$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ $\Rightarrow (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$ $\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ Với $x + y + z \leq 1$, áp dụng các kết quả trên, ta có: $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx}$ $\geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)} = \frac{9}{(x + y + z)^2} \geq \frac{9}{1^2} = 9$ $\frac{2017}{xy + yz + zx} = \frac{6051}{3(xy + yz + zx)} \geq \frac{6051}{(x + y + z)^2} \geq \frac{6051}{1^2} = 6051$ $\Rightarrow P \geq 9 + 6051 = 6060$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$ Vậy $\min P = 6060 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$	
--	--	--	--