

Câu I (2,0 điểm).

1) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Câu II (2,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

2) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

Câu III (1.5 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -mx + 3 - m$ (với m là tham số).

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol (P) , biết điểm M có hoành độ bằng 4.

2) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20$.

Câu IV (4.0 điểm).

1) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn $(O; R)$ vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó. Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn $(O; R)$ (với M khác A , M khác B), tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác COD vuông tại O .

c) Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.

b) Kẻ $MN \perp AB, (N \in AB)$; BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .

2) Tính thể tích của một hình nón có bán kính đáy $r = 4$ cm, độ dài đường sinh $l = 5$ cm.

Câu V (0,5 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$

Chứng minh $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Câu I (2,0 điểm).

1) Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$

Lời giải

Ta có $a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 4$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 4\}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (2; 3).$$

Câu II (2,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$

Lời giải

Ta có
$$A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{45} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} - 9\sqrt{5} + |\sqrt{5}-1|$$
$$= \sqrt{5} + 1 - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = -7\sqrt{5}.$$

2) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0; x \neq 9$).

Rút gọn biểu thức và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có
$$B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{x} - (3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3-\sqrt{x}}.$$

$$B > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4 - (3-\sqrt{x})}{2(3-\sqrt{x})} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{2(3-\sqrt{x})} > 0; (*)$$

Vì $1+\sqrt{x} > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow 3-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 9$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu III (1.5 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -mx + 3 - m$ (với m là tham số).

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol (P) , biết điểm M có hoành độ bằng 4.

Lời giải

$$\text{Vì } M \in (P) \Rightarrow y = \frac{1}{2}.4^2 = 8 \Rightarrow M(4;8).$$

2) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $\frac{1}{2}x^2 = -mx + 3 - m$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (-m)^2 - (2m - 6) = m^2 - 2m + 6 = (m - 1)^2 + 5 > 0, \forall m$$

Suy ra đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Ta có hệ thức Vi-ét } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 6 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu } x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 4x_1x_2 + 20$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4x_1x_2 + 20 \Leftrightarrow (-2m)^2 = 4(2m - 6) + 20$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 (\text{thỏa - man}).$$

Vậy $m = 1$.

Câu IV (4.0 điểm).

1) Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cung nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn $(O; R)$ vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn đó. Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn $(O; R)$ (với M khác A , M khác B), tiếp tuyến của nửa đường tròn tại M cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

a) Chứng minh tứ giác $ACMO$ nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác COD vuông tại O .

c) Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.

b) Kẻ $MN \perp AB, (N \in AB)$; BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .

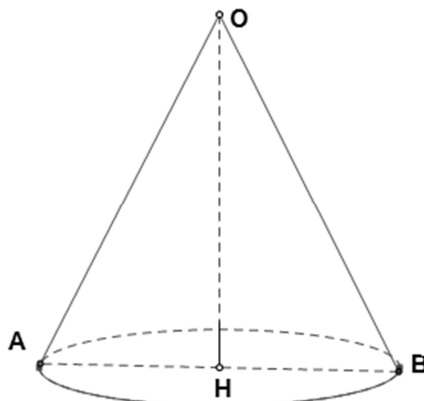
2) Tính thể tích của một hình nón có bán kính đáy $r = 4$ cm, độ dài đường sinh $l = 5$ cm.

Lời giải

Áp dụng hệ quả định lý Ta Lét vào tam giác ABC ta có $\frac{BA}{BN} = \frac{AC}{NI}$

$$\Rightarrow \frac{AE}{NM} = \frac{AC}{NI} = \frac{BA}{BN} \Rightarrow \frac{AE}{NM} = \frac{AC}{NI} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{NM}{NI} = 2 \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } MN.$$

2) Tính thể tích của một hình nón có bán kính đáy $r = 4$ cm, độ dài đường sinh $l = 5$ cm.



Ta có $AH = r = 4$ cm; $AO = l = 5$ cm $\Rightarrow OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{9} = 3$ cm

Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi \cdot r^2 = 16\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Câu V (0,5 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$

Chứng minh $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1.$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$

$$\Leftrightarrow (b+2)(c+2) + (a+2)(c+2) + (a+2)(b+2) \leq (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + 4(a+b+c) + 12 \leq abc + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca + 4(a+b+c) + 12 \leq 1 + 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) + 8$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3$$

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có $\Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3.$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1.$

Hoàn tất chứng minh.