

Câu 1. (1,75 điểm)

1) Giải phương trình $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

2) Giải phương trình
$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

3) Giải phương trình $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

Câu 2. (2,25 điểm)

1) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{-1}{2}x^2$, $y = 2x - 1$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm các tham số thực m để hai đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và $y = 2x - 1$ song song với nhau.

3) Tìm các số thực x để biểu thức $M = \sqrt{3x - 5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$ xác định.

Câu 3. (2 điểm)

1) Cho tam giác MNP vuông tại N có $MN = 4a$, $NP = 3a$ với $0 < a \in \mathbb{R}$. Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón tạo bởi tam giác MNP quay quanh đường thẳng MN .

2) Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm là $2x_1 - (x_2)^2$ và $2x_2 - (x_1)^2$.

3) Bác B vay ở một ngân hàng 100 triệu đồng để sản xuất trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra đúng 1 năm sau bác phải trả cả tiền vốn lẫn tiền lãi, song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm 1 năm nữa, số tiền lãi của năm đầu được gộp vào với tiền vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết 2 năm bác B phải trả tất cả 121 triệu đồng. Hỏi lãi suất cho vay của ngân hàng đó là bao nhiêu phần trăm trong 1 năm?

Câu 4. (1 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + a}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - 3\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right)$ (với $a \geq 0$ và $a \neq 4$).

2) Tìm các số thực x và y thỏa mãn
$$\begin{cases} 4x^2 - xy = 2 \\ y^2 - 3xy = -2 \end{cases}$$

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H .

Biết ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn.

1) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh DE vuông góc với OA .

3) Cho M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC, AH . Cho K, L lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng OM và CE , MN và BD . Chứng minh KL song song với AC .

Câu 6. (0,5 điểm)

Cho ba số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 \geq 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab).$$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN – TỈNH ĐỒNG NAI

Câu 1. (1,75 điểm)

1) Giải phương trình $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

2) Giải phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$

3) Giải phương trình $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

Lời giải

1) Giải phương trình: $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4.2.6 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2.2} = 2 \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2.2} = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{3}{2}; 2 \right\}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = -15 \\ 6x + 8y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17y = 51 \\ x = \frac{3y - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{3.3 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 3)$.

3) Giải hệ phương trình: $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$. Khi đó ta có phương trình $\Leftrightarrow t^2 + 7t - 18 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = 7^2 + 4.18 = 121 > 0$

$\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} t_1 = \frac{-7 + \sqrt{121}}{2} = \frac{-7 + 11}{2} = 2 \text{ (tm)} \\ t_2 = \frac{-7 - \sqrt{121}}{2} = \frac{-7 - 11}{2} = -9 \text{ (ktm)} \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Câu 2 (2,25 điểm):

1) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{-1}{2}x^2$, $y = 2x - 1$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

2) Tìm các tham số thực m để hai đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và $y = 2x - 1$ song song với nhau.

3) Tìm các số thực x để biểu thức $M = \sqrt{3x - 5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$ xác định.

Lời giải

1) Vẽ đồ thị hai hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = 2x - 1$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$

Ta có bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-8	-2	0	-2	-8

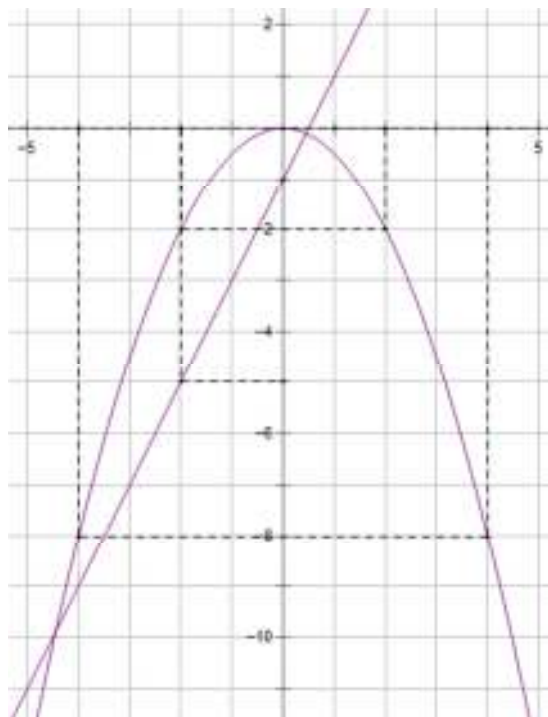
Vậy đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-4; -8)$, $(-2; -2)$, $(0; 0)$, $(2; -2)$, $(4; -8)$ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

+) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 1$

Ta có bảng giá trị:

x	0	-2
$y = 2x - 1$	-1	-5

Vậy đường thẳng $y = 2x - 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm: $(0; -1)$, $(-2; -5)$.



2) Tìm các tham số thực m để hai đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và $y = 2x - 1$ song song với nhau.

Hai đường thẳng $y = (m^2 + 1)x + m$ và $y = 2x - 1$ song song với nhau.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 1 = 2 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = 1. \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

3) Tìm các số thực x để biểu thức $M = \sqrt{3x-5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ xác định.

$$\text{Biểu thức } M \text{ đã cho xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 5 \\ x^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy biểu thức M xác định khi và chỉ khi $x \geq \frac{5}{3}, x \neq 2$.

Câu 3 (2 điểm) (VD):

- 1) Cho tam giác MNP vuông tại N có $MN = 4a$, $NP = 3a$ với $0 < a \in \mathbb{R}$. Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón tạo bởi tam giác MNP quay quanh đường thẳng MN .
- 2) Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm là $2x_1 - (x_2)^2$ và $2x_2 - (x_1)^2$.
- 3) Bác B vay ở một ngân hàng 100 triệu đồng để sản xuất trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra đúng 1 năm sau bác phải trả cả tiền vốn lẫn tiền lãi, song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm 1 năm nữa, số tiền lãi của năm đầu được gộp vào với tiền vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết 2 năm bác B phải trả tất cả 121 triệu đồng. Hỏi lãi suất cho vay của ngân hàng đó là bao nhiêu phần trăm trong 1 năm?

Lời giải

- 1) Cho tam giác MNP vuông tại N có $MN = 4a$, $NP = 3a$ với $0 < a \in \mathbb{R}$. Tính theo a diện tích xung quanh của hình nón tạo bởi tam giác MNP quay quanh đường thẳng MN .

Khi xoay tam giác MNP vuông tại N quanh đường thẳng MN ta được hình nón có chiều cao $h = MN = 4a$ và bán kính đáy $R = NP = 3a$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông MNP ta có:

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 = (4a)^2 + (3a)^2 = 25a^2$$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{25a^2} = 5a \text{ (Do } a > 0 \text{)}$$

Do đó hình nón có độ dài đường sinh là $l = MP = 5a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 3a \cdot 5a = 15\pi a^2$.

- 2) Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm là $2x_1 - (x_2)^2$ và $2x_2 - (x_1)^2$.

Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 (gt) nên áp dụng định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

Xét các tổng và tích sau:

$$\begin{aligned} S &= 2x_1 - (x_2)^2 + 2x_2 - (x_1)^2 = 2(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2(x_1 + x_2) - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 2.3 - [3^2 - 2.1] = -1 \\ P &= [2x_1 - (x_2)^2][2x_2 - (x_1)^2] = 4x_1x_2 - 2x_1^3 - 2x_2^3 + (x_1x_2)^2 \\ &= 4x_1x_2 - 2(x_1^3 + x_2^3) + (x_1x_2)^2 \\ &= 4.1 - 2[3^3 - 3.1.3] + 1^2 = -31. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S^2 = (-1)^2 = 1 \geq 4P = -124$$

$\Rightarrow 2x_1 - (x_2)^2$ và $2x_2 - (x_1)^2$ là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 31 = 0.$$

- 3) Bác B vay ở một ngân hàng 100 triệu đồng để sản xuất trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra đúng 1 năm sau bác phải trả cả tiền vốn lẫn tiền lãi, song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm 1 năm nữa, số tiền lãi của năm đầu được gộp vào với tiền vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết 2 năm bác B phải trả tất cả 121 triệu đồng. Hỏi lãi suất cho vay của ngân hàng đó là bao nhiêu phần trăm trong 1 năm?

Gọi lãi suất cho vay của ngân hàng đó là x (%/năm) (ĐK: $x > 0$).

Số tiền lãi bác B phải trả sau 1 năm gửi 100 triệu đồng là $100x\% = x$ (triệu đồng).

$\Rightarrow$ Số tiền bác B phải trả sau 1 năm là $100 + x$ (triệu đồng).

Do số tiền lãi của năm đầu được tính gộp vào với tiền vốn để tính lãi năm sau nên số tiền lãi bác B phải trả sau 2 năm là $(100 + x)x\% = \frac{(100 + x)x}{100}$ (triệu đồng).

Hết 2 năm bác B phải trả tất cả 121 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$100 + x + \frac{(100 + x)x}{100} = 121 \Leftrightarrow 10000 + 100x + 100x + x^2 = 12100$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 200x - 2100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 210x - 2100 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 10) + 210(x - 10) = 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x + 210) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \\ x + 210 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = -210 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy lãi suất cho vay của ngân hàng đó là 10%/ năm.

Câu 4 (1 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + a}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - 3\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right)$ (với $a \geq 0$ và $a \neq 4$).

2) Tìm các số thực x và y thỏa mãn $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2 \\ y^2 - 3xy = -2 \end{cases}$.

Lời giải

1) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{a} + a}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - 3\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right)$ (với $a \geq 0$ và $a \neq 4$).

Với $a \geq 0$ và $a \neq 4$ thì:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a} + a}{1 + \sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - 3\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2} \right) = \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a})}{1 + \sqrt{a}} \cdot \frac{a - 2\sqrt{a} - \sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) - (\sqrt{a} - 2)}{\sqrt{a} - 2} = \sqrt{a} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 2)}{\sqrt{a} - 2}$$

$$= \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a} - 1) = a - \sqrt{a}$$

Vậy $P = a - \sqrt{a}$.

1) Tìm các số thực x và y thỏa mãn $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2 \\ y^2 - 3xy = -2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 4x^2 - xy = 2 & (1) \\ y^2 - 3xy = -2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2) về với về ta được:

$$4x^2 - xy + y^2 - 3xy = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

Thay $y = 2x$ vào (2) ta được:

$$\Leftrightarrow -2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Với $x = 1$ thì $y = 2 \cdot 1 = 2$.

Với $x = -1$ thì $y = 2 \cdot (-1) = -2$.

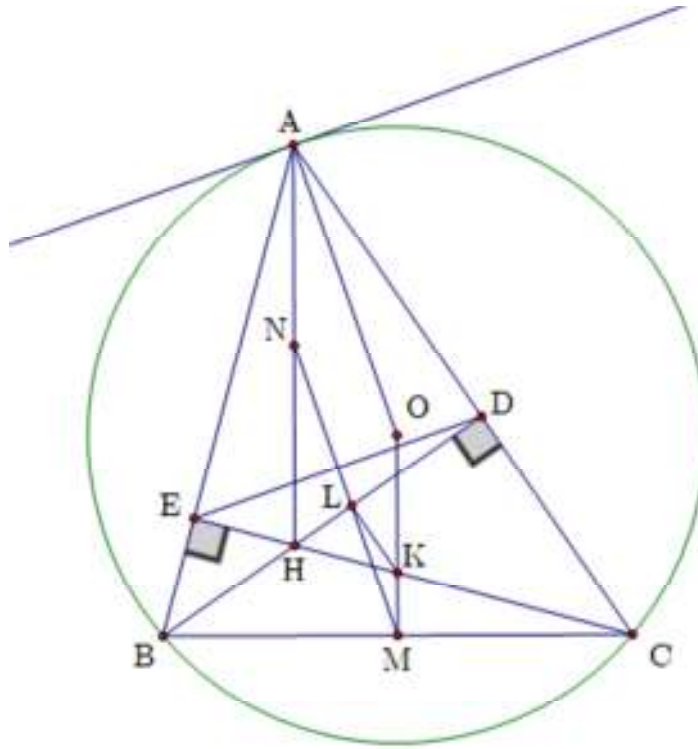
Vậy hệ có nghiệm $(x; y) \in \{(1; 2), (-1; -2)\}$.

Câu 5 (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Biết ba góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn.

- 2) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.
- 3) Chứng minh DE vuông góc với OA .
- 4) Cho M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn BC, AH . Cho K, L lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng OM và CE , MN và BD . Chứng minh KL song song với AC .

Lời giải



Phương pháp:

- 1) Chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh các góc bằng nhau.
- 2) Kẻ tiếp tuyến Ax chứng minh $Ax \parallel DE$.

Cách giải:

$$1) \text{ Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ \\ CE \perp AB \Rightarrow \widehat{CEB} = 90^\circ \end{cases}$$

Tứ giác $BEDC$ có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

Suy ra bốn điểm B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

- 2) Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) tại A .

Khi đó $Ax \perp AO$ (tính chất tiếp tuyến).

Ta có: $\widehat{CAx} = \widehat{CBA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (1)

Do tứ giác $BEDC$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{EDA}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc đối diện đỉnh đó) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAx} = \widehat{EDA} (= \widehat{CBA})$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $DE // Ax$.

Mà $Ax \perp AO$ (cmt) nên $DE \perp AO$ (đpcm).

Câu 6 (0,5 điểm)

Cho ba số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 \geq 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab).$$

Lời giải

Phương pháp:

- Đặt $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab$ đưa bất đẳng thức cần chứng minh về $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.
- Chứng minh đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
- Từ đó đánh giá hiệu $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ và kết luận.

Đặt $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành : $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x^3 + y^3) - 3xyz + z^3 \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xyz + z^3 \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z) \left[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 \right] - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z) \left[x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy \right] \\ &= (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Dễ thấy:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \frac{1}{2} (x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) \\ &= \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0, \forall x, y, z \end{aligned}$$

Do đó ta đi xét dấu của $x + y + z$

Ta có: $x + y + z = a^2 - bc + b^2 - ca + c^2 - ab$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0, \forall a, b, c$$

Suy ra $x + y + z \geq 0 \Rightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \text{ hay } (a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 \geq 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$