

ĐIỆN BIÊN

----- HẾT -----

Câu 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức: $A = \frac{x+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}-3}{x-9}$

1. Tính A khi $x = 25$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{A}{B}$.

Hướng dẫn:

ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 9$

1. Với $x = 25$ (TMĐK) $\Rightarrow A = \frac{25+5}{\sqrt{25}-3} = \frac{30}{5-3} = 15$

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{7\sqrt{x}-3}{x-9}$$

2. Có:
$$= \frac{x-4\sqrt{x}+3+7\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{x+3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

3. Có:
$$\frac{A}{B} = \frac{x+5}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+5}{\sqrt{x}}$$

ĐK: $x > 0$.

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{x+5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{5}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 5$ (TM)

$$\text{Min} A = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

1. a) $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ b) $x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ (x^2 + 3) = 0 \text{ (Vô ly)} \end{cases}$

$$2. \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 + ax + b + 1 = 0$ (a, b là các tham số). Tìm a, b để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

$$\text{Ta có: } \Delta = a^2 - 4(b+1) = a^2 - 4b - 4$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4b - 4 \geq 0$$

Để phương trình có nghiệm thì:

$$\text{Theo Vi-Et ta có: } \begin{cases} x_1 - x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = b + 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1^3 - x_2^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (-a)^2 - b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = a^2 - 4$$

$$b = a^2 - 4$$

$$\Delta = a^2 - 4b - 4 = a^2 - 4(a^2 - 4) - 4 = -3a^2 + 12$$

Thay vào biểu thức Delta ta có:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$$

ĐK:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a + \sqrt{-3a^2 + 12}}{2}; x_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a - \sqrt{-3a^2 + 12}}{2}$$

$$x_1 - x_2 = 3 \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{-a + \sqrt{-3a^2 + 12}}{2} - \frac{-a - \sqrt{-3a^2 + 12}}{2} = 3$$

$$\text{Do: } \Rightarrow -3a^2 + 12 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} (TM) \Rightarrow b = -3$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = -3 \end{cases} \text{ thì pt có nghiệm thỏa mãn đề bài.}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O; R) và có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại I (I khác O). Kẻ đường kính CE.

1. Chứng minh tứ giác ABDE là hình thang cân.

$$= \sqrt{EC^2 + EC^2} = \sqrt{2EC^2} = \sqrt{2 \cdot (2R)^2} = 2\sqrt{2}R \quad (\text{đpcm})$$

3. Giả sử : $AF \perp CD = M$; $BK \perp CD = N$

$$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{IFA} \quad (\text{Cùng phụ với } \widehat{CAM})$$

$$\Rightarrow \Delta AFB \text{ cân tại A.} \Rightarrow AB = AF \quad (3)$$

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAF} \quad (\text{Đường cao trong tam giác cân})$$

$$\text{Mà: } BK \parallel AF \quad (\text{cùng } \perp DC)$$

$$\Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{IAF} \quad (SLT) \Rightarrow \widehat{IKB} = \widehat{IAB} (= \widehat{IAF})$$

$$\Rightarrow \Delta ABK \text{ cân tại B} \Rightarrow BA = BK \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AB = BK = AF$.

$$\Rightarrow AF \parallel BK \Rightarrow ABKF \text{ là HBH}$$

Mặt khác: $\Rightarrow ABKF$ là hình thoi.

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^3 = x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng: $A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ là một số chính phương.

Hướng dẫn:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0$$

1. Với $y = 0 \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1) = 0 \quad (\text{Do: } x^2+1 > 0 \quad \forall x) \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Với } y \neq 0 \Rightarrow y \cdot y^2 = (x+1)(x^2+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ y^2 = x^2+1 \end{cases} \quad (\forall: x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y < y^2, x+1 < x^2+1)$$

$$(x+1)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1 = x^2+1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1$$

Vậy pt có nghiệm là: $(x;y) = (-1; 0) ; (0; 1)$

$$2. \text{ Vì: } ab+bc+ca = 1 \Rightarrow 1 + a^2 = ab+bc+ca + a^2 = (a+b)(a+c) \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 1 + b^2 = ab+bc+ca + b^2 = (a+b)(b+c) \quad (2)$$

$$1 + c^2 = ab+bc+ca + c^2 = (c+b)(a+c) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow A = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \Rightarrow A$ là số CP (đpcm)