

ĐỀ BÀI**Câu 1. (2,0 điểm)**

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 3\sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$B = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} - \sqrt{20}$$

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -2 .

2) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 8 = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -8$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^3 - x_2 = 0$.

2) Nông trường cao su Minh Hưng phải khai thác 260 tấn mủ trong một thời gian nhất định. Trên thực tế, mỗi ngày nông trường đều khai thác vượt định mức 3 tấn. Do đó, nông trường đã khai thác được 261 tấn và song trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nông trường khai thác được bao nhiêu tấn mủ cao su.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường trung tuyến AM . Biết $AH = 3cm; HB = 4cm$.
Hãy tính AB, AC, AM và diện tích tam giác ABC .

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA , qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Trên cung nhỏ BM lấy điểm K (K khác B và M). Gọi H là giao điểm của AK và MN .

- a) Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp đường tròn.
- b) Chứng minh $AK.AH = R^2$.
- c) Trên tia KN lấy điểm I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = BK$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 3\sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$A = 3\sqrt{7^2} - \sqrt{5^2}$$

$$A = 3.7 - 5$$

$$A = 21 - 5$$

$$A = 16$$

$$B = \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2} - \sqrt{20}$$

$$B = |3-2\sqrt{5}| - \sqrt{2^2.5}$$

$$B = -(3-2\sqrt{5}) - 2\sqrt{5}$$

$$B = -3 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$B = -3$$

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$ với $x > 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P .

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1).3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

b) Tìm giá trị của x để $P=1$.

$$P=1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=4$$

$$\Leftrightarrow x=16$$

Vậy $x=16$ thì $P=1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

b) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -2 .

Lời giải

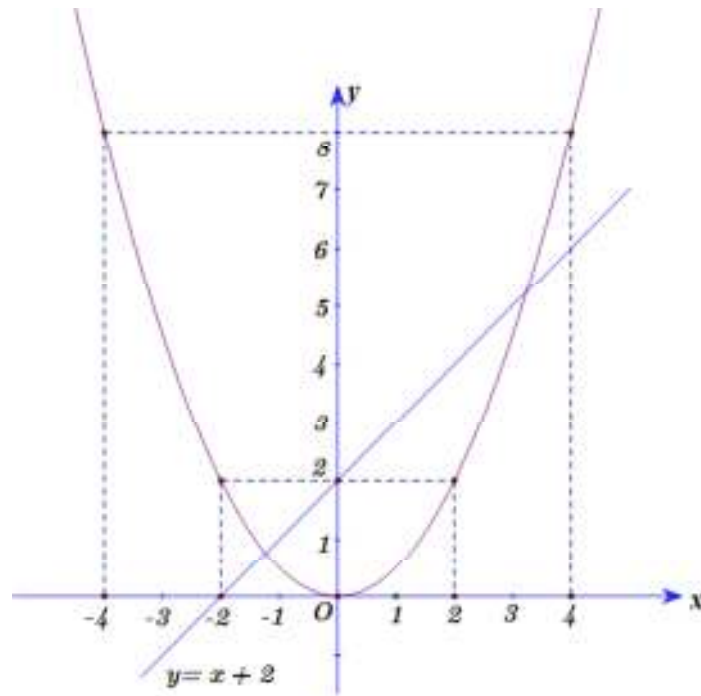
a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy .

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là đường Parabol đi qua các điểm $(-4;8); (-2;2); (0;0); (2;2); (4;8)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng đi qua điểm $(0;2)$ và điểm $(-2;0)$



b) Viết phương trình đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng -2 .

Lời giải

Vì đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ song song với (d) nên ta có phương trình của đường thẳng $(d_1): y = x + b$ ($b \neq 2$)

Gọi $A(-2; y_A)$ là giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d_1) .

$$\Rightarrow A \in (P)$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$$

$$\Rightarrow A(-2; 2)$$

Mặt khác, $A \in (d_1)$, thay tọa độ của điểm A vào phương trình đường thẳng (d_1) , ta được:

$$2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình đường thẳng $(d_1): y = x + 4$

2) Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 1)$

Câu 3. (2,5 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + m+8 = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -8$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^3 - x_2 = 0$.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m = -8$.

Thay $m = -8$ vào phương trình (1), ta được: $x^2 - (-8+2)x - 8 + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy $m = -8$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm: $x = -6; x = 0$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^3 - x_2 = 0$.

Lời giải

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+8) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 32 = m^2 - 28$$

$$\text{Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt khi } \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 28 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{7} \text{ hoặc } m > 2\sqrt{7} \\ m > -2 \\ m > -8 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{7}$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2 = 0 &\Leftrightarrow x_1^3 = x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = x_1^4 = m+8 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[4]{m+8} \Rightarrow x_2 = \sqrt[4]{(m+8)^3} \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = m+2 &\Leftrightarrow \sqrt[4]{m+8} + \sqrt[4]{(m+8)^3} = m+8-6 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[4]{m+8} = t$ ($t \geq 0$), ta có: $t + t^3 = t^4 - 6$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^3 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 16 - (t^3 + t - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 4) - (t^3 - 8 + t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4) - [(t-2)(t^2+2t+4) + (t-2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4) - (t-2)(t^2+2t+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+4t+8-t^2-2t-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^3+t^2+2t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=2 \text{ (vì } t \geq 0 \Rightarrow t^3+t^2+2t+3 > 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{m+8}=2 \Leftrightarrow m+8=2^4=16 \Leftrightarrow m=8 \text{ (nhận)}$$

2) Nông trường cao su Minh Hưng phải khai thác 260 tấn mủ trong một thời gian nhất định. Trên thực tế, mỗi ngày nông trường đều khai thác vượt định mức 3 tấn. Do đó, nông trường đã khai thác được 261 tấn và song trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nông trường khai thác được bao nhiêu tấn mủ cao su.

Lời giải

Gọi số tấn mủ cao su mỗi ngày nông trường khai thác được là x (tấn)

(Điều kiện: $0 < x < 260$)

Thời gian dự định khai thác mủ cao su của nông trường là: $\frac{260}{x}$ (ngày)

Trên thực tế, mỗi ngày nông trường khai thác được: $x+3$ (tấn)

Thời gian thực tế khai thác mủ cao su của nông trường là: $\frac{261}{x+3}$ (ngày)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{261}{x+3}+1=\frac{260}{x}$

$$\Rightarrow \frac{261x}{x(x+3)}+\frac{x(x+3)}{x(x+3)}=\frac{260(x+3)}{x(x+3)}$$

$$\Rightarrow 261x+x(x+3)=260(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 261x+x^2+3x=260x+780$$

$$\Leftrightarrow 261x+x^2+3x-260x-780=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-780=0 \quad (1)$$

$$\Delta'=4+780=784>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{784}=28$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

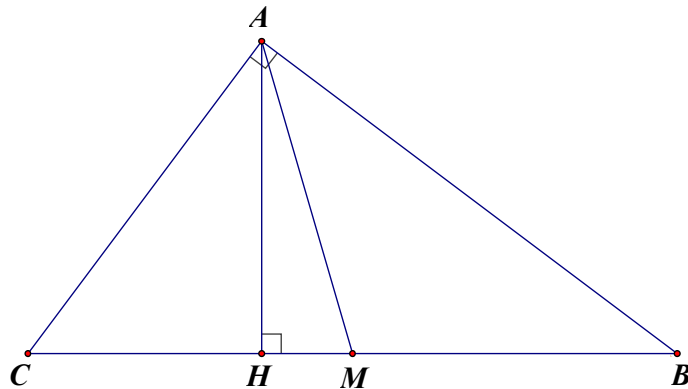
$$x_1=\frac{-2+28}{1}=26 \text{ (nhận) hoặc } x_2=\frac{-2-28}{1}=-30 \text{ (loại)}$$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày nông trường cao su khai thác 26 tấn.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường trung tuyến AM . Biết $AH = 3\text{cm}$; $HB = 4\text{cm}$.
Hãy tính AB, AC, AM và diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , theo định lý Pitago, ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2$

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , có đường cao AH .

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AC^2} = \frac{16}{225} \Rightarrow AC^2 = \frac{225}{16}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4} \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , theo định lý Pitago, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$BC^2 = 5^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = 25 + \frac{225}{16} = \frac{625}{16}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4} \text{ (cm)}$$

$\triangle ABC$ vuông tại A , AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{8} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8} \text{ (cm}^2\text{)}$$

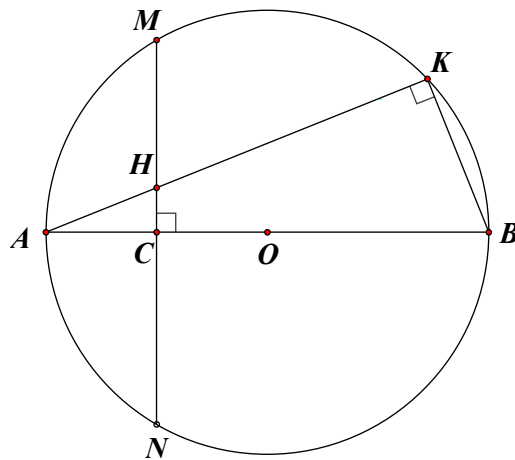
Câu 5. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA , qua C kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N . Trên cung nhỏ BM lấy điểm K (K khác B và M). Gọi H là giao điểm của AK và MN .

- Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $AK \cdot AH = R^2$.
- Trên tia KN lấy điểm I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = BK$.

Lời giải

- Chứng minh tứ giác $BCHK$ nội tiếp đường tròn.



Vì $AB \perp HC$ tại C nên $\widehat{BCH} = 90^\circ$;

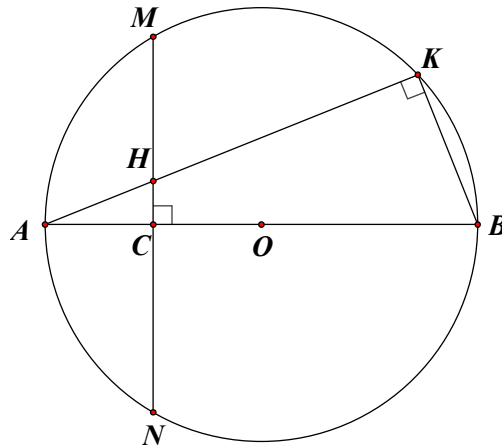
Ta có: $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BKH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BCHK$ có: $\widehat{BCH} + \widehat{BKH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{BCH}; \widehat{BKH}$ là hai góc đối nhau.

Suy ra: Tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AK.AH = R^2$.



Xét $\triangle ACH$ và $\triangle AKB$ có:

$$\widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90^\circ;$$

$\widehat{BAK}$ là góc chung;

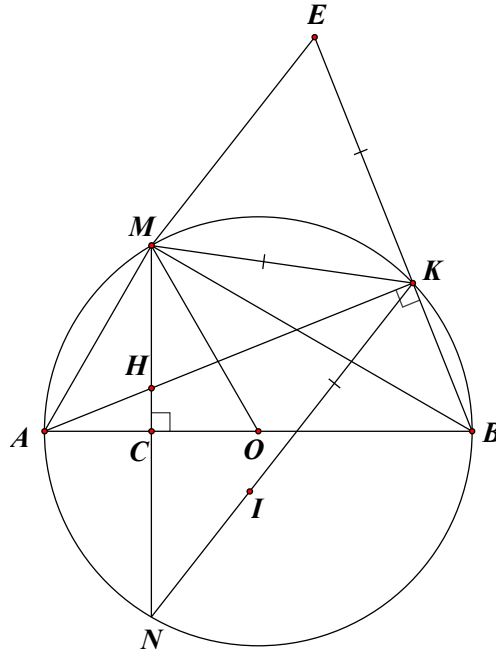
Do đó: $\triangle ACH \sim \triangle AKB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AK}$$

$$\Rightarrow AH.AK = AB.AC = 2R \cdot \frac{R}{2} = R^2$$

Vậy $AK.AH = R^2$

c) Trên tia KN lấy điểm I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = BK$.



Trên tia đối của tia KB lấy điểm E sao cho $KE = KM = KI$

Xét $\triangle OAM$ có MC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (vì C là trung điểm của OA)

$\Rightarrow \triangle OAM$ cân tại $M \Rightarrow AM = OM$.

Mà $OA = OM = R \Rightarrow OA = OM = AM$

$\Rightarrow \triangle OAM$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{OAM} = 60^\circ$

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M .

$\Rightarrow \widehat{ABM} = 30^\circ$

Xét $\triangle BMC$ vuông tại C có: $\widehat{BMC} + \widehat{MBC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = 90^\circ - \widehat{MBC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BMN} = 60^\circ$ (1)

Vì tứ giác $ABKM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EKM} = \widehat{MAB} = 60^\circ$

Mặt khác: $KM = KE$ (cách dựng) $\Rightarrow \triangle EKM$ cân tại K

Và $\widehat{EKM} = 60^\circ \Rightarrow \triangle EKM$ là tam giác đều. $\Rightarrow \widehat{KME} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{BMN} = \widehat{KME} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMN} + \widehat{BMK} = \widehat{KME} + \widehat{BMK}$

$\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{BME}$

Xét $\triangle BCM$ vuông tại C có: $\sin \widehat{CBM} = \sin 30^\circ$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BM = 2CM$$

Mà $OA \perp MN$ tại C

$\Rightarrow C$ là trung điểm của MN (đường kính vuông góc với dây cung thì đi qua trung điểm của dây cung).

$$\Rightarrow MN = 2CM$$

$$\Rightarrow MN = BM \text{ (vì } = 2CM \text{)}$$

Xét $\triangle MNK$ và $\triangle MBE$ có:

$$\widehat{MKN} = \widehat{MBE} \text{ (Hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{MK} \text{)}$$

$$MN = BM \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{NMK} = \widehat{BME} \text{ (cmt)}$$

Do đó: $\triangle MNK = \triangle MBE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow NK = BE \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow IN + IK = BK + KE$$

Mà $IK = KE$ (vẽ hình)

Suy ra: $IN = BK$