

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

Ngày thi: 12 tháng 6 năm 2022

(Đề thi gồm 02 trang)

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 .

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$.

Bài 3. (1,0 điểm)

Để đánh giá thể trạng (gầy, bình thường, thừa cân) của một người, người ta thường dùng chỉ số BMI (*Body Mass Index*). Chỉ số BMI được tính dựa trên chiều cao và cân nặng theo công thức sau:

$$\text{BMI} = \frac{\text{cân nặng (kg)}}{\text{chiều cao (m)} \times \text{chiều cao (m)}} \quad (\text{kg/m}^2)$$

Đối với người trưởng thành, chỉ số này cho đánh giá như sau:

Phân loại	BMI (kg/m^2)
Cân nặng thấp (gầy)	$< 18,5$
Bình thường	$18,5 - 24,9$
Thừa cân	≥ 25
Tiền béo phì	$25 - 29,9$
Béo phì độ I	$30 - 34,9$
Béo phì độ II	$35 - 39,9$
Béo phì độ III	≥ 40

Hạnh và Phúc là hai người trưởng thành đang cần xác định thể trạng của mình.

- Hạnh cân nặng 50 kg và cao $1,63 \text{ m}$. Hãy cho biết phân loại theo chỉ số BMI của Hạnh?
- Phúc cao $1,73 \text{ m}$ thì cân nặng trong khoảng nào để chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường?
(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Bài 4. (0,75 điểm)

Giá bán một cái bánh cùng loại ở hai cửa hàng A và B đều là 15 000 đồng, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau.

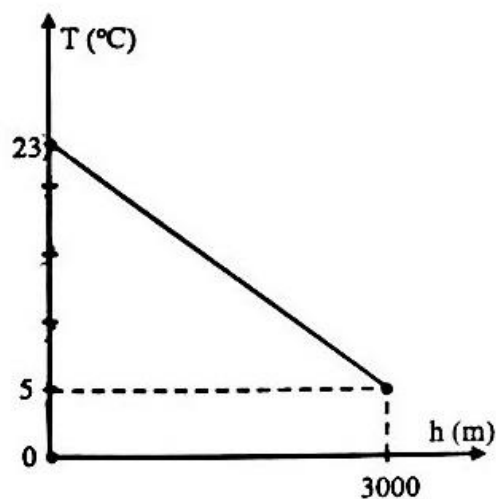
Cửa hàng A: đối với 3 cái bánh đầu tiên, giá mỗi cái là 15 000 đồng và từ cái bánh thứ tư trở đi khách hàng chỉ phải trả 75% giá bán.

Cửa hàng B: cứ mua 3 cái bánh thì được tặng thêm 1 cái bánh cùng loại.

Bạn Hằng cần đúng 13 cái bánh để tổ chức sinh nhật thì bạn ấy nên mua bánh ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm được bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia?

Bài 5. (1,0 điểm)

Một vận động viên khi leo núi nhận thấy rằng càng lên cao thì nhiệt độ không khí càng giảm. Mối liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được cho bởi hàm số $T = a.h + b$ có đồ thị như hình vẽ bên (nhiệt độ T tính theo $^{\circ}C$ và độ cao h tính theo mét).

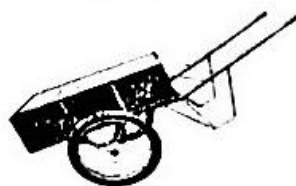
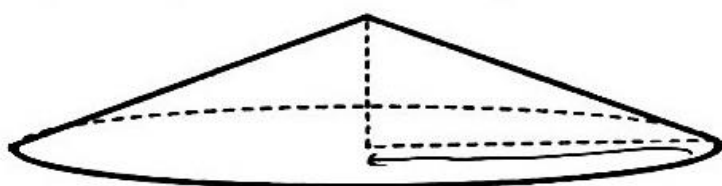


Tại chân núi, người đó đo được nhiệt độ không khí là $23^{\circ}C$ và trung bình cứ lên cao 100 m thì nhiệt độ giảm $0,6^{\circ}C$.

- Xác định a, b trong công thức trên.
- Bạn Minh đang leo núi và dùng nhiệt kế đo được nhiệt độ không khí tại vị trí dừng chân là $15,8^{\circ}C$. Hỏi bạn Minh đang ở độ cao bao nhiêu mét so với chân núi?

Bài 6. (1,0 điểm)

Một đồng cát dạng hình nón có chu vi đáy là $25,12\text{ m}$ và độ cao là $1,5\text{ m}$.



- Tính thể tích của đồng cát trên? Biết công thức tính chu vi đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3,14$).
- Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đồng cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m , rộng 6 dm và cao 3 dm . Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển hết đồng cát trên?

Bài 7. (0,75 điểm)

Đại hội Thể thao Đông Nam Á - SEA Games (South East Asian Games) là sự kiện thể thao được tổ chức 2 năm một lần với sự tham gia của các vận động viên trong khu vực Đông Nam Á. Việt Nam là chủ nhà của SEA Games 31 diễn ra từ ngày 12/5/2022 đến ngày 23/5/2022.



Ở môn bóng đá nam, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

- Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?
- Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Bài 8. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$. Từ D kẻ DE vuông góc với BC (E thuộc BC), kẻ DF vuông góc với AC (F thuộc AC). Đường thẳng EF cắt tia AB tại K .

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp và $\widehat{DFE} = \widehat{DAB}$.
- Chứng minh tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB.DF = DA.DE$.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, EF . Chứng minh IJ vuông góc với DJ .

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN ĐIỀU KIỆN LỚP 10/2022

SỞ GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO TP HCM

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước – Nguyễn Văn Quý – Nguyễn Tiến Dũng
Dương Hồng Sơn – Phạm Duy Nguyễn Lâm

1. Đề thi

Bài 1 (1.5 điểm). Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

- a) Vẽ ($\mathcal{P}$) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của ($\mathcal{P}$) và (d) bằng phép tính.

Bài 2 (1.0 điểm). Cho phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$.

Bài 3 (1.0 điểm). Để đánh giá thể trạng (gầy, bình thường, thừa cân) của một người, người ta thường dùng chỉ số BMI (*Body Mass Index*). Chỉ số BMI được tính dựa trên chiều cao và cân nặng theo công thức sau.

$$\text{BMI} = \frac{\text{cân nặng (kg)}}{\text{chiều cao (m)} \times \text{chiều cao (m)}} \quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right)$$

Đối với người trưởng thành, chỉ số này đánh giá như sau.

Phân loại	BMI (kg/m^2)
Cân nặng thấp (gầy)	< 18.5
Bình thường	$18.5 - 24.9$
Thừa cân	≥ 25
Tiền béo phì	$25 - 29.9$
Béo phì độ I	$30 - 34.9$
Béo phì độ II	$35 - 39.9$
Béo phì độ III	≥ 40

Hạnh và Phúc là hai người trưởng thành đang cần xác định thể trạng của mình.

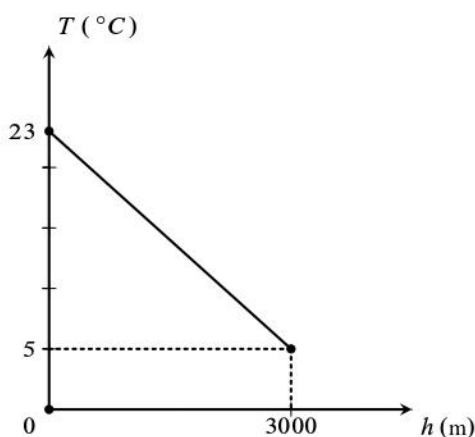
- a) Hạnh cân nặng 50 kg và cao 1.63 m. Hãy cho biết phân loại theo chỉ số BMI của Hạnh?
- b) Phúc cao 1.73 m thì cân nặng trong khoảng nào để chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)

Bài 4 (0.75 điểm). Giá bán một cái bánh cùng loại ở hai cửa hàng A và B đều là 15000 đồng, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau.

- Cửa hàng A: Đối với ba cái bánh đầu tiên, giá mỗi cái là 15000 đồng và từ cái bánh thứ tư trở đi khách hàng chỉ phải trả 75% giá bán.
- Cửa hàng B: Cứ mua ba cái bánh thì được tặng thêm một cái bánh cùng loại.

Bạn Hằng cần đúng 13 cái bánh để tổ chức sinh nhật thì bạn ấy nên mua bánh ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm được bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia?

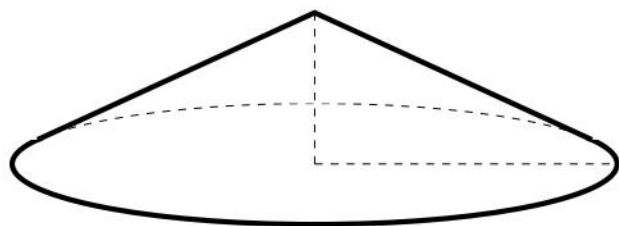
Bài 5 (1.0 điểm). Một vận động viên khi leo núi nhận thấy rằng càng lên cao thì nhiệt độ không khí càng giảm. Mỗi liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được cho bởi hàm số $T = ah + b$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới (nhiệt độ T tính theo độ C và độ cao h tính theo mét).



Tại chân núi, người ta đo được nhiệt độ không khí là 23°C và trung bình cứ lên cao 100 m thì nhiệt độ giảm 0.6°C .

- Xác định a , b trong công thức trên.
- Bạn Minh đang leo núi và dùng nhiệt kế đo nhiệt độ không khí tại vị trí dừng chân là 15.8°C . Hỏi, bạn Minh đang ở độ cao bao nhiêu mét so với chân núi?

Bài 6 (1.0 điểm). Một đồng cát dạng hình nón có chu vi đáy là 25.12 m và độ cao là 1.5 m.



- Tính thể tích của đồng cát trên. Biết công thức chu vi đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3.14$).
- Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đồng cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m, rộng 6 dm và cao 3 dm. Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi, cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển hết đồng cát trên?

Bài 7 (0.75 điểm). Đại hội Thể thao Đông Nam Á – SEA Games (South East Asian Games) là sự kiện thể thao được tổ chức hai năm một lần với sự tham gia của các vận động viên trong khu vực Đông Nam Á. Việt Nam là chủ nhà của SEA Games 31 diễn ra từ 12/05/2022 đến ngày 23/05/2022.



Ở môn bóng đá nam, một bảng đấu gồm có năm đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

- Hỏi, có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?
- Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi, có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Bài 8 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$ (D khác B). Từ điểm D , kẻ đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BC tại điểm E và kẻ đường thẳng DF vuông góc với đường thẳng AC tại điểm F . Đường thẳng EF cắt tia AB tại điểm K .

- Chứng minh rằng tứ giác $CDEF$ nội tiếp và $\angle DFE = \angle DAB$.
- Chứng minh rằng tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và EF . Chứng minh rằng đường thẳng IJ vuông góc với đường thẳng DJ .

2. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (1.5 điểm). Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = -x + 2$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = -x + 2$. Phương trình này tương đương với $(x - 1)(x + 2) = 0$, từ đây ta có $x = 1$ (tương ứng, $y = 1$), hoặc $x = -2$ (tương ứng, $y = 4$). Vậy, tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1, 1)$ và $(-2, 4)$. $\square$

Bài 2 (1.0 điểm). Cho phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$.

Lời giải. Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 4x - 3 = 0$ nên theo định lý Vieta, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$. Do đó $A = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 2^2 - 4 \cdot -\frac{3}{2} = 10$. $\square$

Bài 3 (1.0 điểm). Để đánh giá thể trạng (gầy, bình thường, thừa cân) của một người, người ta thường dùng chỉ số BMI (*Body Mass Index*). Chỉ số BMI được tính dựa trên chiều cao và cân nặng theo công thức sau.

$$\text{BMI} = \frac{\text{cân nặng (kg)}}{\text{chiều cao (m)} \times \text{chiều cao (m)}}.$$

Đối với người trưởng thành, chỉ số này đánh giá như sau.

Phân loại	BMI (kg/m ²)
Cân nặng thấp (gầy)	< 18.5
Bình thường	18.5 – 24.9
Thừa cân	≥ 25
Tiền béo phì	25 – 29.9
Béo phì độ I	30 – 34.9
Béo phì độ II	35 – 39.9
Béo phì độ III	≥ 40

Hạnh và Phúc là hai người trưởng thành đang cần xác định thể trạng của mình.

- Hạnh cân nặng 50 kg và cao 1.63 m. Hãy cho biết phân loại theo chỉ số BMI của Hạnh?
- Phúc cao 1.73 m thì cân nặng trong khoảng nào để chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)

Lời giải. a) Chỉ số BMI của Hạnh là $\frac{50}{1.63^2} \approx 18.8$ (kg/m²). Như vậy, theo bảng phân loại chỉ số BMI, ta thấy Hạnh thuộc nhóm Bình thường.

b) Gọi cân nặng của Phúc là x (kg), $x > 0$. Chỉ số BMI của Phúc là $\frac{x}{1.73^2}$ (kg/m²). Để chỉ số BMI của Phúc ở mức bình thường thì

$$18.5 \leq \frac{x}{1.73^2} \leq 24.9.$$

Do đó $55.4 \leq x \leq 74.5$. Vậy, để chỉ số BMI ở mức bình thường thì cân nặng của Phúc trong khoảng từ 55.4 kg đến 74.5 kg. $\square$

Bài 4 (0.75 điểm). Giá bán một cái bánh cùng loại ở hai cửa hàng A và B đều là 15000 đồng, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau.

- Cửa hàng A: Đối với ba cái bánh đầu tiên, giá mỗi cái là 15000 đồng và từ cái bánh thứ tư trở đi khách hàng chỉ phải trả 75% giá bán.
- Cửa hàng B: Cứ mua ba cái bánh thì được tặng thêm một cái bánh cùng loại.

Bạn Hằng cần đúng 13 cái bánh để tổ chức sinh nhật thì bạn ấy nên mua bánh ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm được bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia?

Lời giải. Ta thấy rằng

- Nếu bạn Hằng mua 13 cái bánh ở cửa hàng A thì số tiền bạn Hằng phải trả là

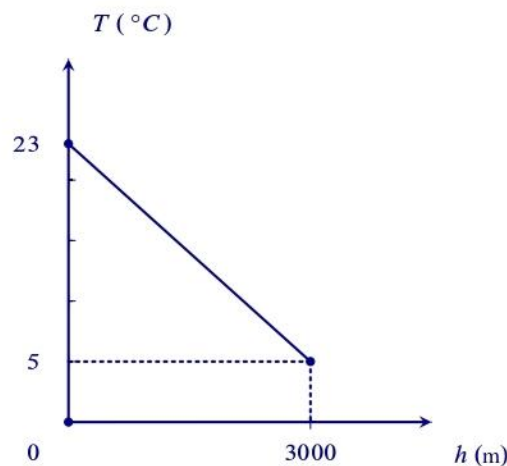
$$15000 \cdot 3 + 15000 \cdot 75\% \cdot 10 = 157500 \text{ (đồng)}.$$

- Nếu bạn Hằng mua 13 cái bánh ở cửa hàng B thì số tiền bạn Hằng phải trả là

$$15000 \cdot 3 \cdot 3 + 15000 = 150000 \text{ (đồng)}.$$

Do đó, bạn Hằng mua bánh ở cửa hàng B sẽ tiết kiệm hơn và tiết kiệm được 7500 đồng so với khi mua bánh ở cửa hàng A . $\square$

Bài 5 (1.0 điểm). Một vận động viên khi leo núi nhận thấy rằng càng lên cao thì nhiệt độ không khí càng giảm. Mỗi liên hệ giữa nhiệt độ không khí T và độ cao h (so với chân núi) được cho bởi hàm số $T = ah + b$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới (nhiệt độ T tính theo độ C và độ cao h tính theo mét).



Tại chân núi, người ta đo được nhiệt độ không khí là $23^\circ C$ và trung bình cứ lên cao 100 m thì nhiệt độ giảm $0.6^\circ C$.

- Xác định a, b trong công thức trên.
- Bạn Minh đang leo núi và dùng nhiệt kế đo nhiệt độ không khí tại vị trí dừng chân là $15.8^\circ C$. Hỏi, bạn Minh đang ở độ cao bao nhiêu mét so với chân núi?

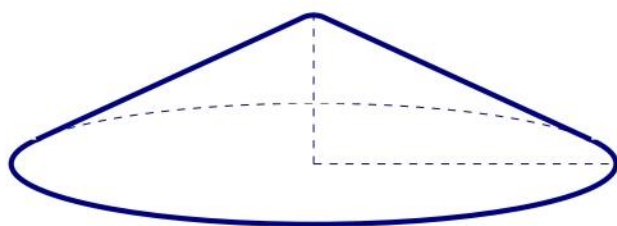
Lời giải. a) Vì tại chân núi, nhiệt độ không khí đo được là $23^\circ C$ nên $23 = a \cdot 0 + b = b$, tức $b = 23$. Theo đồ thị, ta cũng có nhiệt độ không khí đo được ở độ cao 3000 m là $5^\circ C$, do đó $5 = a \cdot 3000 + b = a \cdot 3000 + 23$, suy ra $a = -\frac{3}{500}$. Vậy $a = -\frac{3}{500}$ và $b = 23$.

b) Gọi h_m độ cao của vị trí mà Minh đang dừng so với chân núi. Vì nhiệt độ không khí đo được ở vị trí Minh dừng chân nên $15.8 = a \cdot h_m + b$, suy ra

$$h_m = \frac{15.8 - b}{a} = \frac{15.8 - 23}{-\frac{3}{500}} = 1200.$$

Vậy, bạn Minh đang dừng ở độ cao 1200 m so với chân núi. $\square$

Bài 6 (1.0 điểm). Một đồng cát dạng hình nón có chu vi đáy là 25.12 m và độ cao là 1.5 m.



- a) Tính thể tích của đồng cát trên. Biết công thức chu vi đường tròn là $C = 2\pi R$ và công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (trong đó R là bán kính đường tròn đáy; h là chiều cao hình nón, lấy $\pi = 3.14$).
- b) Người ta dùng xe cải tiến để vận chuyển đồng cát đó đến khu xây dựng. Biết thùng chứa của xe cải tiến có dạng hình hộp chữ nhật có kích thước dài 1 m, rộng 6 dm và cao 3 dm. Trong mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn thể tích thực của nó là 10% để vận chuyển được nhiều cát hơn. Hỏi, cần ít nhất bao nhiêu chuyến xe cải tiến để chuyển hết đồng cát trên?

Lời giải. a) Gọi R là bán kính đáy của đồng cát. Theo giả thiết, ta có $25.12 = 2\pi R$, suy ra $R = \frac{25.12}{2\pi}$ (m). Từ đây, ta có thể tích của đồng cát là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{25.12}{2\pi}\right)^2 \cdot 1.5 = 25.12$ (m³).

b) Thể tích thùng chứa của xe cải tiến là $1 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0.18$ (m³). Vì mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa nhiều hơn 10% so với thể tích thực của nó nên ở mỗi chuyến xe, thùng xe có thể chứa $110\% \cdot 0.18 = 0.198$ mét khối cát. Ta có $\frac{25.12}{0.198} \approx 126.9$, do đó để vận chuyển hết đồng cát đã cho, cần ít nhất $126 + 1 = 127$ chuyến xe. $\square$

Bài 7 (0.75 điểm). Đại hội Thể thao Đông Nam Á – SEA Games (South East Asian Games) là sự kiện thể thao được tổ chức hai năm một lần với sự tham gia của các vận động viên trong khu vực Đông Nam Á. Việt Nam là chủ nhà của SEA Games 31 diễn ra từ 12/05/2022 đến ngày 23/05/2022.



Ở môn bóng đá nam, một bảng đấu gồm có năm đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

- a) Hỏi, có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?
- b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi, có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

Lời giải. a) Vì có năm đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại) nên có tất cả $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên.

b) Gọi số trận thắng – thua và số trận hòa lần lượt là x và y ($x, y \in \mathbb{N}$). Theo câu **a)**, ta có

$$x + y = 10. \quad (1)$$

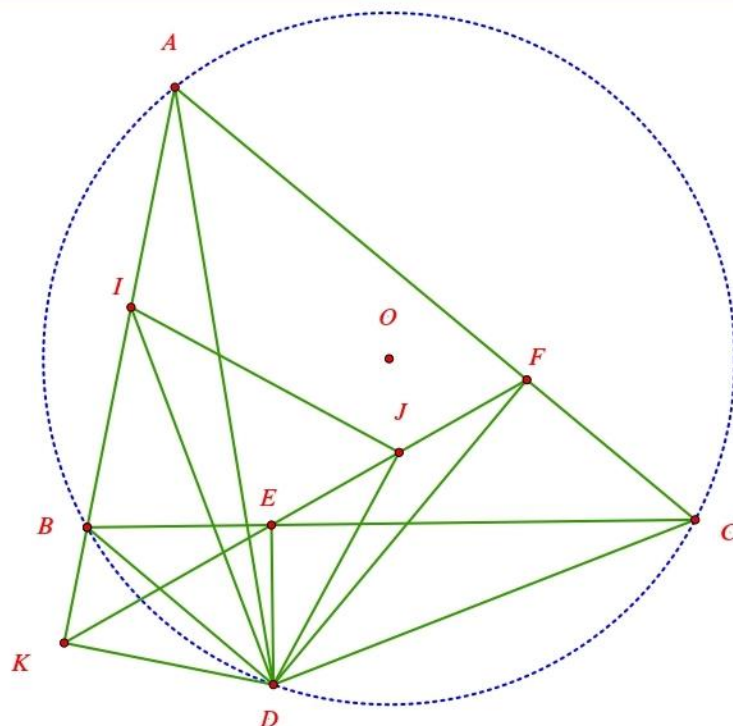
Vì mỗi trận thắng – thua có tổng số điểm là 3 và mỗi trận hòa có tổng số điểm là 2 nên

$$3x + 2y = 10 + 9 + 6 + 4 + 0 = 29. \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2), ta được $(x, y) = (9, 1)$. Như vậy, có một trận hòa. Chú ý rằng chỉ có một trận hòa (hai đội này mỗi đội được 1 điểm), mỗi trận thắng – thua (mỗi đội được 3 điểm hoặc 0 điểm) nên hai đội hòa có số điểm chia 3 dư 1. Do đó, hai đội hòa là A và D . $\square$

Bài 8 (3.0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Gọi D là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $DB < DC$ (D khác B). Từ điểm D , kẻ đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BC tại điểm E và kẻ đường thẳng DF vuông góc với đường thẳng AC tại điểm F . Đường thẳng EF cắt tia AB tại điểm K .

- Chứng minh rằng tứ giác $CDEF$ nội tiếp và $\angle DFE = \angle DAB$.
- Chứng minh rằng tứ giác $DKBE$ nội tiếp và $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và EF . Chứng minh rằng đường thẳng IJ vuông góc với đường thẳng DJ .



Lời giải. a) Do $DE \perp BC$ và $DF \perp AC$ nên $\angle DEB = \angle DEC = \angle DFA = \angle DFC = 90^\circ$. Xét tứ giác $CDEF$ có $\angle DEC = \angle DFC = 90^\circ$, mà E, F là hai đỉnh kề nhau nên tứ giác $CDEF$ nội tiếp. Suy ra $\angle DFE = \angle DCE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE). (1)

Xét đường tròn (O) , ta có $\angle DAB = \angle DCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD). (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $\angle DFE = \angle DAB$.

b) Do các tứ giác $ABDC$, $CDEF$ nội tiếp nên $\angle DBA + \angle DCA = \angle DEF + \angle DCF = 180^\circ$ (hai góc đối bù nhau). Suy ra $\angle DBA = \angle DEF$. (3)

Lại có $\angle DBA + \angle DBK = \angle DEF + \angle DEK = 180^\circ$ (tính chất hai góc kề bù). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $\angle DBK = \angle DEK$. Mà B, E là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $DKBE$ nên tứ giác $DKBE$ nội tiếp.

Xét hai tam giác DAB và DFE , có $\angle DAB = \angle DFE$ và $\angle DBA = \angle DEF$. Do đó, hai tam giác DAB và DFE đồng dạng (g-g). Suy ra $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DE}$. Vì thế, $DB \cdot DF = DA \cdot DE$.

c) Ta có hai tam giác DAB và DFE đồng dạng, đồng thời I và J lần lượt là trung điểm của AB và EF nên $\frac{DA}{DF} = \frac{AB}{FE} = \frac{2AI}{2FJ} = \frac{AI}{FJ}$.

Xét hai tam giác DAI và DFJ , có $\frac{DA}{DF} = \frac{AI}{FJ}$ và $\angle DAI = \angle DFJ$. Do đó, hai tam giác DAI và DFJ đồng dạng (c-g-c). Suy ra $\frac{DA}{DF} = \frac{DI}{DJ}$ và $\angle ADI = \angle FDJ$. Do đó, $\frac{DI}{DA} = \frac{DJ}{DF}$ và $\angle IDJ = \angle ADI + \angle ADJ = \angle FDJ + \angle ADJ = \angle ADF$.

Xét hai tam giác DIJ và DAF , có $\frac{DI}{DA} = \frac{DJ}{DF}$ và $\angle IDJ = \angle ADF$. Suy ra hai tam giác DIJ và DAF đồng dạng (c-g-c). Do đó, $\angle DJI = \angle DFA = 90^\circ$. Vậy $IJ \perp DJ$. $\square$