

Thời gian làm bài 120 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có 01 trang, 05 câu.

Câu 1 (2,5 điểm).

a. Tính giá trị của các biểu thức: $A = \sqrt{81} - \sqrt{16}$; $B = \sqrt{(\sqrt{11} + 2)^2} - \sqrt{11}$.

b. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

1, Rút gọn biểu thức P .

2, Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = x - 3$.

b. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$.

c. Cho phương trình bậc hai với tham số m : $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1).

1, Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

2, Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Câu 3 (1,5 điểm). Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

b.
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Câu 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

a. Chứng minh rằng tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b. Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.

c. Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Câu 5 (0,5 điểm). Cho các số thực a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,5 điểm)

a. Tính giá trị của các biểu thức: $A = \sqrt{81} - \sqrt{16}$; $B = \sqrt{(\sqrt{11} + 2)^2} - \sqrt{11}$.

b. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tính giá trị của P khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a.

Ta có $A = \sqrt{81} - \sqrt{16} = \sqrt{9^2} - \sqrt{4^2} = 9 - 4 = 5$

$$B = \sqrt{(\sqrt{11} + 2)^2} - \sqrt{11} = |\sqrt{11} + 2| - \sqrt{11} = \sqrt{11} + 2 - \sqrt{11} = 2.$$

Vậy $A = 5, B = 2$.

b.

1. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} \\ &= \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} = \frac{2}{\sqrt{a}-1} \end{aligned}$$

2. Ta có $a = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = |\sqrt{2} + 1| = \sqrt{2} + 1$.

Thay $\sqrt{a} = \sqrt{2} + 1$ vào biểu thức P sau thu gọn ta được $P = \frac{2}{\sqrt{a}-1} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = x - 3$.

b. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$.

c. Cho phương trình bậc hai với tham số m : $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1).

1. Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$.

Lời giải

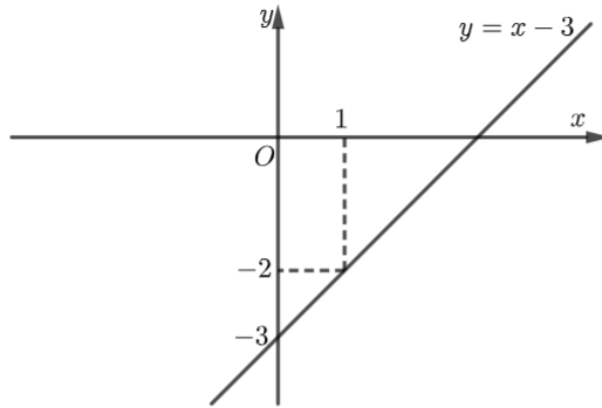
a.

Bảng giá trị: $(d): y = x - 3$

x	0	1
$y = x - 3$	-3	-2

Đường thẳng $y = x - 3$ đi qua 2 điểm $A(0; -3)$ và $B(1; -2)$.

Đồ thị



b. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - 3$ là

$$-2x^2 = x - 3 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 3 = 0$$

Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 > 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3}{2}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2 \cdot (-2)} = 1.$$

$$\text{Với } x_1 = \frac{-3}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-3}{2} - 3 = \frac{-9}{2} \Rightarrow A\left(\frac{-3}{2}; \frac{-9}{2}\right).$$

$$\text{Với } x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow B(1; -2).$$

Vậy hai giao điểm cần tìm là $A\left(\frac{-3}{2}; \frac{-9}{2}\right)$ và $B(1; -2)$.

c.

1. Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$$\text{Ta có } a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0.$$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = 3$.

Vậy với $m = 0$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 3\}$.

2. Xét phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = 0$ (1)

$$\text{Ta có } \Delta' = (m+1)^2 - (2m-3) = m^2 + 4 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Khi đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m-3 \end{cases}.$$

Theo đề $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 2(m+1) - 2(2m-3) = 1 \Leftrightarrow -2m + 8 = 1 \Leftrightarrow 2m = 7 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$.

Vậy $m = \frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. (1,5 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

b.
$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}.$$

Lời giải

a. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0$ (1)

Phương trình (1) có $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$ nên có hai nghiệm phân biệt là $t_1 = 1, t_2 = 2$.

Với $t_1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t_2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

b.

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y+3) + y = 9 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 6 = 9 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 1)$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Dây cung MN vuông góc với AB , ($AM < BM$). Hai đường thẳng BM và NA cắt nhau tại K . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ K đến đường thẳng AB .

a. Chứng minh rằng tứ giác $AHKM$ nội tiếp trong một đường tròn.

b. Chứng minh rằng $NB.HK = AN.HB$.

c. Chứng minh HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{HMA} = \widehat{BMO}$.

Mà $\widehat{AMO} + \widehat{BMO} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \widehat{AMO} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMO} = 90^\circ \Rightarrow HM \perp OM \text{ tại } M.$$

Vậy HM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M .

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{4(a+c)}$$

$$\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}$$

$$\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{c}{4(c+a)} + \frac{c}{c+b}$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} &\leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{4(a+c)} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{4(c+a)} + \frac{c}{c+b} \\ \Leftrightarrow P &\leq \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} \right) + \left(\frac{a}{4(a+c)} + \frac{c}{4(c+a)} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{a}{a+b} = \frac{a}{4(a+c)} \\ \frac{b}{b+c} = \frac{b}{b+a} \\ \frac{c}{4(c+a)} = \frac{c}{c+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4(a+c) \\ b+c=b+a \\ 4(c+a)=c+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ a+b=4.2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=7a \end{cases} \Leftrightarrow a=c=\frac{b}{7}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{4}$ khi $a=c=\frac{b}{7}$.