

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề).
Chú ý: Đề thi gồm 02 trang. Thí sinh làm bài vào tờ giấy thi.

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho hai biểu thức:

$$A = (\sqrt{80} - 3\sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5};$$

$$B = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ (với } x \geq 0, x \neq 1).$$

- a) Rút gọn các biểu thức A, B .
b) Tìm các giá trị của x để $A + B = 2$.

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4\sqrt{x-2} - y = 1 \\ 2\sqrt{x-2} + 3y = 25 \end{cases}$$

2. Bác An thuê nhà với giá 1500000 đồng/tháng, bác phải trả tiền dịch vụ giới thiệu là 500000 đồng (tiền dịch vụ chỉ trả một lần). Gọi x (tháng) là thời gian mà bác An thuê nhà, y (đồng) là tổng số tiền bác phải trả bao gồm tiền thuê nhà trong x (tháng) và tiền dịch vụ giới thiệu.

- a) Lập công thức tính y theo x .
b) Tính tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng.

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 3.$$

2. Bài toán có nội dung thực tế:

Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây?

Bài 4. (0,75 điểm)

Để gò một chiếc thùng hình trụ bằng tôn không nắp có đường kính đáy là 40 cm và chiều cao là 60 cm thì cần dùng tối thiểu bao nhiêu mét vuông tôn? (coi lượng tôn dùng để viền mép thùng không đáng kể; lấy $\pi \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M (M khác A). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp.

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H . Chứng minh: $MA^2 = MC \cdot MD$ và $\widehat{IAB} = \widehat{MDH}$.

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC và BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành.

Bài 6. (0,75 điểm)

Cho a, b, c là 3 số dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c + ab}}.$$

----- Hết -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho hai biểu thức:

$$A = (\sqrt{80} - 3\sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5}; \quad B = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \quad (\text{với } x \geq 0, x \neq 1).$$

a) Rút gọn các biểu thức A, B .

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{80} - 3\sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} = (\sqrt{4^2 \cdot 5} - 3\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= (4\sqrt{5} - 3 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= (4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + \sqrt{5}) : \sqrt{5} \\ &= -\sqrt{5} : \sqrt{5} = -1. \end{aligned}$$

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \\ &= \sqrt{x}-1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}-1. \end{aligned}$$

Vậy $A = -1, B = 2\sqrt{x}-1 (x \geq 0, x \neq 1)$.

b) Tìm các giá trị của x để $A+B=2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A+B &= -1+2\sqrt{x}-1 = 2\sqrt{x}-2. \\ A+B=2 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-2=2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4 \text{ (tm)}. \end{aligned}$$

Vậy để $A+B=2$ thì $x=4$.

Bài 2.

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4\sqrt{x-2}-y=1 \\ 2\sqrt{x-2}+3y=25 \end{cases}.$$

Lời giải

ĐK XD: $x \geq 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} 4\sqrt{x-2}-y=1 \\ 2\sqrt{x-2}+3y=25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x-2}-y=1 \\ 4\sqrt{x-2}+6y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=49 \\ 4\sqrt{x-2}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ 4\sqrt{x-2}-7=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ 4\sqrt{x-2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ \sqrt{x-2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=6 \end{cases} \text{ (tmdk)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (6; 7)$.

2. Bác An thuê nhà với giá 1500000 đồng/tháng, bác phải trả tiền dịch vụ giới thiệu là 500000 đồng (tiền dịch vụ chỉ trả một lần). Gọi x (tháng) là thời gian mà bác An thuê nhà, y (đồng) là tổng số tiền bác phải trả bao gồm tiền thuê nhà trong x (tháng) và tiền dịch vụ giới thiệu.

a) Lập công thức tính y theo x .

b) Tính tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng.

Lời giải

a) Lập công thức tính y theo x .

Tổng số tiền thuê trong x (tháng) bác An phải trả là $1500000x$ (đồng).

Tổng số tiền bác phải trả bao gồm tiền thuê nhà trong x (tháng) và tiền dịch vụ giới thiệu là:
 $y = 1500000x + 500000$ (đồng).

Vậy công thức tính y theo x là: $y = 1500000x + 500000$.

b) Tính tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng.

Tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng là:

$$y = 1500000 \cdot 5 + 500000 = 8000000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy tổng số tiền bác An phải trả sau khi thuê nhà 5 tháng là 8000000 (đồng).

Bài 3.

1. Cho phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$.

Lời giải

Với $m = 1$ thay vào phương trình (1), ta được: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

$$a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0 \text{ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2.$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot 2m = m^2 + 4m + 4 - 8m = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2.$$

Suy ra $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$, phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$\text{Theo hệ thức Vi - ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1x_2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 - 2m \leq 3$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m+1 = 0 \text{ (do } (m+1)^2 \geq 0, \forall m)$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (tm)}.$$

Vậy $m = -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 3$.

2. Bài toán có nội dung thực tế:

Một người dự định trồng 210 cây theo thời gian định trước. Nhưng do thời tiết xấu nên thực tế mỗi ngày người đó trồng được ít hơn dự định 5 cây, vì thế hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến. Hỏi theo dự định ban đầu, mỗi ngày người đó trồng được bao nhiêu cây?

Lời giải

Gọi số cây mỗi ngày người đó trong theo dự định ban đầu là: x (cây) (ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian trồng cây theo dự định là: $\frac{210}{x}$ (ngày).

Số cây trồng theo thực tế là $x - 5$ (cây).

Thời gian trồng cây theo thực tế là: $\frac{210}{x-5}$ (ngày).

Vì thời gian hoàn thành công việc chậm mất 7 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{210}{x-5} - \frac{210}{x} &= 7 \\ \Leftrightarrow \frac{210x - 210(x-5)}{x(x-5)} &= \frac{7x(x-5)}{x(x-5)} \\ \Leftrightarrow 210(x - x + 5) &= 7x(x-5) \\ \Leftrightarrow 210 \cdot 5 &= 7x^2 - 35x \\ \Leftrightarrow 7x^2 - 35x - 1050 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x - 150 &= 0.\end{aligned}$$

Ta có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-150) = 625 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 25$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = \frac{5+25}{2} = 15 \text{ (tm)} \\ x = \frac{5-25}{2} = -10 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy theo dự định ban đầu, người đó trồng được 15 cây mỗi ngày.

Bài 4.

Để gò một chiếc thùng hình trụ bằng tôn không nắp có đường kính là 40 cm và chiều cao là 60 cm thì cần dùng tối thiểu bao nhiêu mét vuông tôn? (coi lượng tôn dùng để viền mép thùng không đáng kể, lấy $m \approx 3,14$, kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Lời giải

Thùng hình trụ có đường kính là 40 cm nên bán kính đáy là $r = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} \Rightarrow r = 0,2 \text{ m}$.

Chiều cao $h = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$.

Diện tích của mặt đáy chiếc thùng là $S_d = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot (0,2)^2 = 0,1256 \text{ m}^2$.

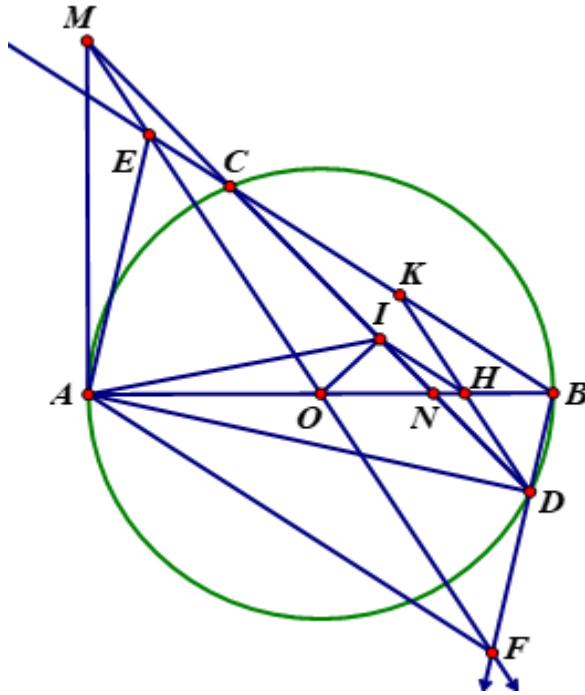
Diện tích xung quanh chiếc thùng tôn là $S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi r h \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,7536 \text{ m}^2$.

Diện tích toàn phần của chiếc thùng tôn là $S = S_d + S_{xq} \approx 0,8792 \text{ m}^2$.

Vậy diện tích tôn cần dùng tối thiểu là $S = 0,88 \text{ m}^2$.

Bài 5.

Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A lấy điểm M (M khác A). Lấy điểm N trên đoạn thẳng OB (N khác O và B). Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD .



a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải

Ta có $IC = ID$ (vì I là trung điểm của CD) nên OI vuông góc với $CD \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$.

MA là tiếp tuyến của (O) nên MA vuông góc với $OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AIMO$ có $\widehat{OIM} + \widehat{OAM} = 180^\circ$.

Vậy $AIMO$ nội tiếp đường tròn (tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°).

b) Qua D kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB tại H . Chứng minh: $MA^2 = MC.MD$ và $\widehat{IAB} = \widehat{MDH}$.

Lời giải

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MAD$ có

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC).

Góc $\widehat{M}$ chung.

Suy ra $\triangle MAC$ và $\triangle MAD$ là hai tam giác đồng dạng.

Do đó $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ (đpcm).

Xét đường tròn đường kính OM có $\widehat{IAB} = \widehat{IMO}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OI}$).

Mà $DK \parallel MO$ nên $\widehat{IMO} = \widehat{MDH}$ (2 góc so le trong).

Suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{MDH}$ (đpcm).

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MO với hai đường thẳng BC và BD . Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình bình hành.

Lời giải

Kéo dài DH cắt BC tại K . Vì $\widehat{IAB} = \widehat{MDK}$ nên tứ giác $AIKD$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IHA} = \widehat{IDA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Xét (O) có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Do đó $\widehat{HIA} = \widehat{CBA}$ vì 2 góc này ở vị trí đồng vị nên $IH \parallel BC$.

Xét $\triangle CDK$ Có $IH \parallel BC$ và $IC = ID$ nên $HK = HD$

Xét $\triangle EBO$ có $KH \parallel OE$ nên $\frac{HK}{OE} = \frac{BH}{BO}$

Xét $\triangle FBO$ có $DH \parallel OF$ nên $\frac{HD}{OF} = \frac{BH}{BO}$

$\Rightarrow \frac{HK}{OE} = \frac{HD}{OF}$ mà $HK = HD$ nên $OE = OF$ hay O là trung điểm của EF

mà O là trung điểm của AB nên $AEBF$ là hình bình hành.

Bài 6.

Cho a, b, c là các số dương : $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c + ab}}$$

Lời giải

Vì a, b, c là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương a^2, bc ta có:

$$(a + b)(a + c) = ab + ac + a^2 + bc \geq ac + ab + 2a\sqrt{bc} = (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a + b)(a + c)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{ab} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (2)$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a + \sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b + c)(b + a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c + a)(c + b)}} \\ & \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Dấu bằng xảy ra khi: $a^2 = bc, b^2 = ac, c^2 = ab$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow \text{Max } P = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$