

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 11 / 6 / 2022

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (2,0 điểm)

1. Không dùng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$
2. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; $x > 0, x \neq 1$.
 - a) Rút gọn biểu thức Q .
 - b) Tìm số nguyên x để Q có giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 2: (2,0 điểm)

1. Cho phương trình: $2x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng tích của chúng.
2. Trong hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng (d) : $y = -x + 4$ và điểm $A(2,2)$.
 - a) Chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng (d) .
 - b) Tìm a để parabol (P) : $y = ax^2$ đi qua điểm A . Với giá trị a tìm được, hãy xác định toạ độ điểm B là giao điểm thứ hai của (d) và (P) .
 - c) Tính diện tích tam giác OAB .

Bài 3: (1,5 điểm)

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13cm, diện tích là 30cm^2 . Tính độ dài các cạnh góc vuông.

Bài 4: (3,5 điểm)

Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến SB, SC (B, C là các tiếp điểm) và một cát tuyến cắt (O) tại D và E (D nằm giữa S và E). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A . BC và AC cắt DE lần lượt tại F và I .

- a) Chứng minh: $\widehat{SIC} = \widehat{SBC}$.
- b) Chứng minh 5 điểm S, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.
- c) Chứng minh: $FI \cdot FS = FD \cdot FE$.
- d) Đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng NF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Chứng minh ba điểm S, K, M thẳng hàng.

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho 3 số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Không dùng máy tính, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$.

2. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; $x \geq 0$, $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Tìm số nguyên x để Q có giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = 4y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4y + 6) + 3y = 1 \\ x = 4y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 4y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2; -1)$.

2.

a) Rút gọn biểu thức Q .

Với $x \geq 0$, $x \neq 1$ ta có

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \left(\frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{x + \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$Q = \frac{2}{x - 1}$$

Vậy với $x \geq 0$, $x \neq 1$ thì $Q = \frac{2}{x - 1}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $2x^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng tích của chúng.

2. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) : $y = -x + 4$ và điểm $A(2; 2)$.

a) Chứng minh điểm A thuộc đường thẳng (d) .

b) Tìm a để parabol (P) : $y = ax^2$ đi qua điểm A . Với giá trị a tìm được, hãy xác định tọa độ điểm B là giao điểm thứ hai của (d) và (P) .

c) Tính diện tích tam giác OAB .

1.

$$\Delta = [-(m+1)]^2 - 4.2.(m-1)$$

$$\Delta = m^2 + 2m + 1 - 8m + 8$$

$$\Delta = m^2 - 6m + 9$$

$$\Delta = (m-3)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m.$$

Do đó phương trình luôn có hai nghiệm.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

Theo định lí Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Theo đề có hiệu hai nghiệm bằng tích của chúng nên $x_1 - x_2 = x_1 x_2$

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \\ x_1 - x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = m \\ x_1 - x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m}{2} \\ x_1 - x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \text{ nên } \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2} \Leftrightarrow m = 2m - 2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng tích của chúng.

2.

a) Thay $x = 2$ vào hàm số $y = -x + 4$ ta được

$$y = -2 + 4 = 2$$

Vậy điểm A thuộc đường thẳng (d) .

b) Parabol $(P): y = ax^2$ đi qua điểm $A(2;2)$ nên

$$2 = a.2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } y = \frac{1}{2}x^2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 1^2 - 1.(-8) = 9 > 0$$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{1} = 2$$

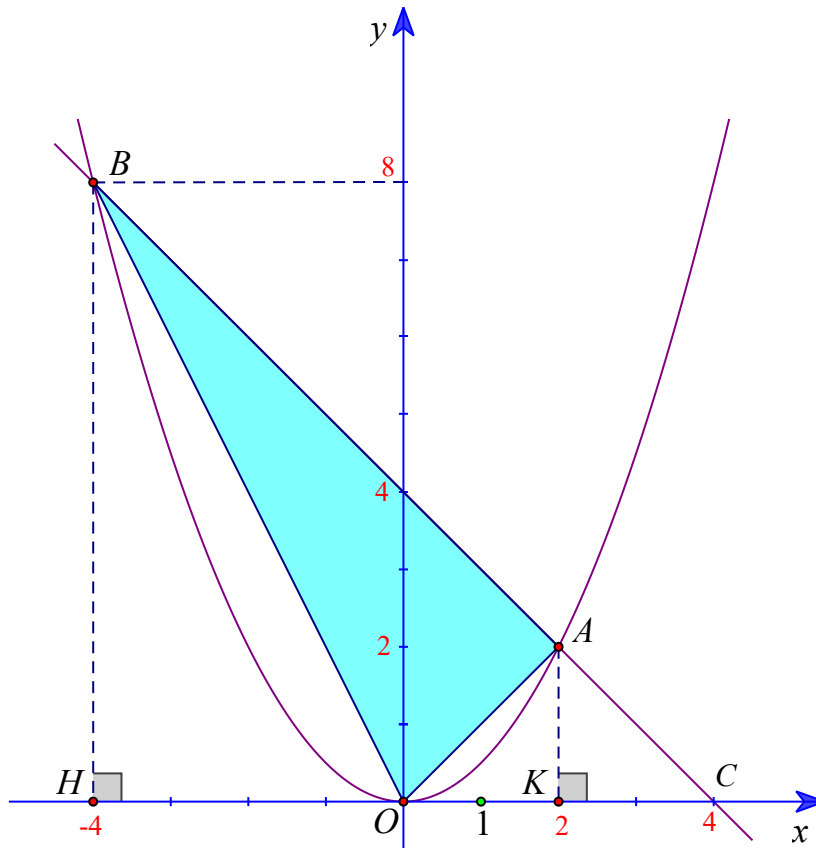
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{1} = -4$$

Với $x = x_2 = -4$ thì $y = -(-4) + 4 = 8$, ta được điểm $B(-4;8)$

Vậy giao điểm thứ hai là $B(-4;8)$.

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = -x + 4$ trên cùng mặt phẳng tọa độ.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng $y = -x + 4$ với Ox . Khi đó $C(4;0)$



$A(2;2)$ nên $AK = 2$, $OC = 4$

$B(-4;8)$ nên $BH = 8$

$$S_{OAB} = S_{OBC} - S_{OAC}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}BH \cdot OC - \frac{1}{2}AK \cdot OC$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 12 \text{ (đvdt)}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13cm , diện tích là 30cm^2 . Tính độ dài các cạnh góc vuông.

Lời giải

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác là x (cm) và y (cm).

(Điều kiện: $0 < x; y < 13$)

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ta có

$$x^2 + y^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 169$$

Vì diện tích tam giác là 30cm^2 nên ta có phương trình $\frac{1}{2}xy = 30 \Leftrightarrow xy = 60$

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ xy = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ 2xy = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 289 \\ xy = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 17 \\ xy = 60 \end{cases}$$

Do đó x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 17X + 60 = 0$ (1)

Giải phương trình (1) ta được

$$X_1 = 12 \text{ (tm)}$$

$$X_2 = 5 \text{ (tm)}$$

Suy ra $x = 5$ (tm)

$$y = 12 \text{ (tm)}$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác là 5 (cm) và 12 (cm)

Câu 4. (3,5 điểm)

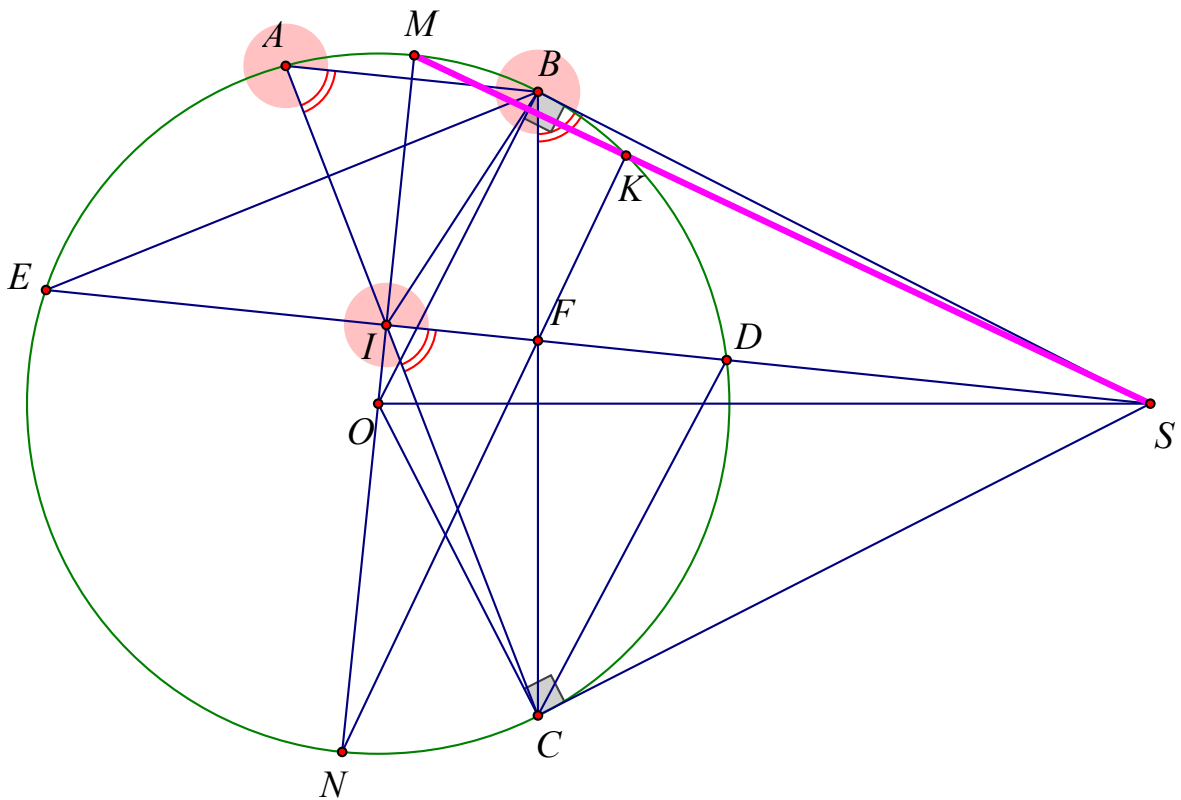
Từ một điểm S nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến SB, SC (với B, C là các tiếp điểm) và một cát tuyến cắt (O) tại D và E (D nằm giữa S và E). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A . BC và AC cắt DE lần lượt tại F và I .

a) Chứng minh: $\widehat{SIC} = \widehat{SBC}$.

b) Chứng minh 5 điểm S, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh: $FI.FS = FD.FE$

d) Đường thẳng OI cắt đường tròn (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB). Đường thẳng NF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Chứng minh ba điểm S, K, M thẳng hàng.



a)

Ta có $\widehat{SIC} = \widehat{BAC}$ (so le trong, $AB \parallel ED$)

mà $\widehat{SBC} = \widehat{BAC}$ ($= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{BC}$)

nên $\widehat{SIC} = \widehat{SBC}$

b)

Xét tứ giác $SBIC$ ta có

$$\widehat{SIC} = \widehat{SBC} \text{ (câu a)}$$

Hai điểm I, B cùng nhìn đoạn SC dưới những góc bằng nhau nên $SBIC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn, đường tròn này đi qua ba điểm B, C, S (1)

Xét tứ giác $SBOC$ ta có

$$\widehat{SBO} = \widehat{SCO} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Do đó $SBOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn, đường tròn này đi qua ba điểm B, C, S (2)

Do qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một đường tròn nên từ (1) và (2) ta suy ra 5 điểm S, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn.

c)

* Xét hai tam giác IFC và BFS ta có

$$\widehat{SIC} = \widehat{SBC} \text{ (câu a)}$$

$$\widehat{IFC} = \widehat{SFB} \text{ (đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle IFC \sim \triangle BFS$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FI}{FB} = \frac{FC}{FS}$$

$$\Rightarrow FI.FS = FB.FC \text{ (3)}$$

* Xét hai tam giác FBE và FDC ta có

$$\widehat{EBF} = \widehat{CDF} \text{ (} \widehat{EBC} = \widehat{CDE} \text{, góc nội tiếp cùng chắn cung } EC \text{)}$$

$$\widehat{BFE} = \widehat{DFC} \text{ (đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle FBE \sim \triangle FDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC}$$

$$\Rightarrow FD.FE = FB.FC \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $FI.FS = FD.FE$

d) Vì 5 điểm S, B, O, I, C cùng nằm trên một đường tròn nên

$$\widehat{SIO} = \widehat{SBO} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } SO \text{)}$$

Mà $\widehat{SBO} = 90^\circ$ nên $\widehat{SIO} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự như câu c ta có $FN.FK = FB.FC$

Mà $FI.FS = FB.FC$ (câu c)

nên $FI.FS = FN.FK$

Suy ra tứ giác $NIKS$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{SKN} = \widehat{SIN} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } SN \text{)}$$

Mà $\widehat{SIN} = \widehat{SIO} = 90^\circ$ nên $\widehat{SKN} = 90^\circ$

$$\Rightarrow NK \perp SK$$

Mặt khác $NK \perp MK$ ($\widehat{MKN} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vậy ba điểm S, K, M thẳng hàng.

Câu 5. (1 điểm) Cho ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Lời giải

Đặt

$$x = b + c - a$$

$$y = c + a - b$$

$$z = a + b - c$$

Vì ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên theo bất đẳng thức tam giác x, y, z là các số dương.

Từ đó suy ra

$$a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{x+y}{2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} &= \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right] \end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số dương nên

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right] \geq 3$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

----- THCS.TOANMATH.com -----