

Câu 1.

a) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{48} + \sqrt{125} - 5\sqrt{5}$.

b) Tìm điều kiện của x để biểu thức $B = \sqrt{3x-4}$ có nghĩa.

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x - 4y = 3 \end{cases}.$$

b) Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + b$. Xác định giá trị của b bằng phép tính để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P) .

Câu 3.

Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m = 0$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

c) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1(3+x_1) + x_2(3+x_2) = -4.$$

Câu 4.

Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng OA , E là điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho E không trùng với A và B . Dựng đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B . Gọi d là đường thẳng qua E và vuông góc với EI . Đường thẳng d cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\triangle IAE$ đồng dạng với $\triangle NBE$. Từ đó chứng minh $IB \cdot NE = 3IE \cdot NB$.

c) Khi điểm E thay đổi, chứng minh tam giác $\triangle MNI$ vuông tại I và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích $\triangle MNI$ theo R .

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Ta có: $A = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3 \cdot 4^2} + \sqrt{5^3} - 5\sqrt{5} = 2\sqrt{3} + 20\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 22\sqrt{3}$.

Vậy $A = 22\sqrt{3}$.

b) Ta có B có nghĩa khi và chỉ khi $3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$.

Vậy với $x \geq \frac{4}{3}$ thì B có nghĩa.

Câu 2.

a) Cộng vế theo vế của hệ phương trình ta được: $3x + 4y + x - 4y = 5 + 3 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Với $x = 2$, ta có: $2 - 4y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}$.

Vậy hệ cho có nghiệm $(x; y) = \left(2; -\frac{1}{4}\right)$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$2x^2 = 3x + b \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - b = 0.$$

(P) tiếp xúc với $(d) \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-b) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{9}{8}$.

Vậy với $b = -\frac{9}{8}$ thì (P) tiếp xúc với (d) .

Câu 3.

a) Khi $m = 4$, phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-4=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{-1; 4\}$.

b) Phương trình (1) có $\Delta = (m-1)^2 - 4(-m) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \geq 0$

Nên phương trình (1) có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}
x_1(3+x_1)+x_2(3+x_2) &= -4 \\
\Leftrightarrow x_1^2+x_1^2+3(x_1+x_2) &= -4 \\
\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)-2x_1x_2 &= -4 \\
\Leftrightarrow (m-1)^2+3(m-1)+2m+4 &= 0 \\
\Leftrightarrow m^2+3m+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=-2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta có $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.

a) Ta có d_1 là tiếp tuyến của (O) tại A nên $\widehat{MAI} = 90^\circ$.

Theo giả thiết $\widehat{MEI} = 90^\circ$.

Suy ra: $\widehat{MAI} + \widehat{MEI} = 90^\circ$ hay tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

b) Do E nằm trên đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$.

Theo giả thiết $\widehat{NEI} = 90^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{BEN}$ (1) do cùng phụ với $\widehat{IEB}$.

Lại có $\widehat{AEI} = \widehat{EBN}$ (2) do cùng phụ với $\widehat{ABE}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\triangle AIE$ đồng dạng với $\triangle BEN$.

c) Theo câu a) ta có tứ giác $AMEI$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{MIE} = \widehat{MAE}$.

Chứng minh tương tự cũng có $BIEN$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{EIB} = \widehat{EBN}$.

Mà $\widehat{MAE} = 90^\circ - \widehat{EAB}$ và $\widehat{EBN} = 90^\circ - \widehat{EBA}$.

Suy ra $\widehat{MAE} + \widehat{EBN} = 180^\circ - (\widehat{EAI} + \widehat{EBA}) = 180^\circ - (180^\circ - \widehat{AEB}) = \widehat{AEB} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{MIE} + \widehat{EIN} = 90^\circ$. Suy ra tam giác MNI vuông tại I .

$$\text{Khi đó } S_{\triangle MNI} = \frac{MI \cdot IN}{2} = \frac{\sqrt{MI^2 \cdot IN^2}}{2} = \frac{\sqrt{(MA^2 + AI^2)(MB^2 + IB^2)}}{2} \quad (3).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki, ta có:

$$\sqrt{(MA^2 + IA^2)(NB^2 + IB^2)} \geq MA \cdot NB + IA \cdot IB \quad (4)$$

Theo câu a) tứ giác $AMEI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{AEI}$.

Mà $\widehat{AEI} = \widehat{BEN}$ theo câu a). Nên $\widehat{AMI} = \widehat{BEN}$.

Mà $\widehat{BEN} = \widehat{NIB}$ do tứ giác $BNEI$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{NIB}$, suy ra $\triangle MAI$ đồng dạng với tam giác $\triangle IBN$.

Suy ra $\frac{MA}{IB} = \frac{IA}{BN} \Rightarrow MA \cdot NB = IA \cdot IB$ (5).

Từ (3), (4) và (5) suy ra $S_{\triangle MNI} \geq IA \cdot IB = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MA}{NB} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{3}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của $\triangle MNI$ là $\frac{3R^2}{4}$.

---- HẾT ----