

ĐỀ SỐ 01

ĐỀ THI MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề).
Chú ý: Đề thi gồm 02 trang. Thí sinh làm bài vào tờ giấy thi.

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho hai biểu thức:

$$A = 3\sqrt{7} - \sqrt{28} + \sqrt{175} - 3;$$

$$B = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \quad (\text{với } x > 0).$$

a) Rút gọn biểu thức A và biểu thức B .

b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A bằng ba lần giá trị của biểu thức B .

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng (d) . Xác định các giá trị của a và b biết (d) song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2020$ và (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -5 .

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(x-1) + 2(x-2y) = 10 \\ 4(x-2) - (x-2y) = 2 \end{cases}.$$

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 7$.

b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Bài toán có nội dung thực tế:

Một nhà máy theo kế hoạch phải sản xuất 2100 thùng nước sát khuẩn trong một thời gian quy định (số thùng nước sát khuẩn nhà máy phải sản xuất trong mỗi ngày là bằng nhau). Để đẩy nhanh tiến độ công việc trong giai đoạn tăng cường phòng chống đại dịch COVID-19, mỗi ngày nhà máy đã sản xuất nhiều hơn dự định 35 thùng nước sát khuẩn. Do đó, nhà máy đã hoàn thành công việc trước thời hạn 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày nhà máy phải sản xuất bao nhiêu thùng nước sát khuẩn?

Bài 4. (3,5 điểm)

1. Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC , F là giao điểm thứ hai của đường thẳng EB với đường tròn (O) , K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AF với đường tròn (O) . Chứng minh:

a) Tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp và tam giác ABF đồng dạng với tam giác AKB ;

b) $BF \cdot CK = CF \cdot BK$;

c) Tam giác FCE đồng dạng với tam giác CBE và EA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF .

2. Một hình nón có bán kính đáy là 5 cm , diện tích xung quanh bằng $65\pi\text{ cm}^2$. Tính chiều cao của hình nón đó.

Bài 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là hai số thực bất kì. Chứng minh $x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)$.

b) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$. Chứng minh

$$\frac{x\sqrt{x}}{x + \sqrt{xy} + y} + \frac{y\sqrt{y}}{y + \sqrt{yz} + z} + \frac{z\sqrt{z}}{z + \sqrt{zx} + x} \geq \frac{2}{3}.$$

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

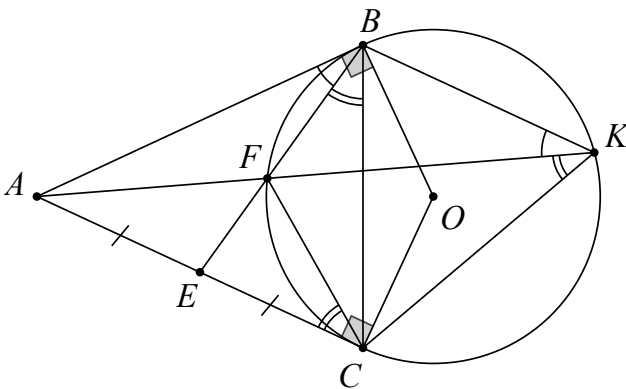
HDC ĐỀ SỐ 01

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN

(gồm 05 trang)

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
1 (1,5đ)	1.a. (1,0 điểm)	
	$A = 3\sqrt{7} - \sqrt{28} + \sqrt{175} - 3$ $= 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 3$	0,25
	$= 6\sqrt{7} - 3$	0,25
	Với $x > 0$ ta có: $B = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1}$	0,25
	$\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} - 1.$	0,25
	1.b (0,5 điểm)	
1 (1,5đ)	Để giá trị của biểu thức A bằng ba lần giá trị của biểu thức B thì $6\sqrt{7} - 3 = 3(2\sqrt{x} - 1)$ $\Leftrightarrow 6\sqrt{7} - 3 = 6\sqrt{x} - 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{7}$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 7$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$).	0,25
	Vậy với $x = 7$ thì giá trị của biểu thức A bằng ba lần giá trị của biểu thức B .	0,25
2 (1,5đ)	2.a (0,75 điểm)	
	Ta có đường thẳng $(d): y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2020$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b \neq 2020 \end{cases}$.	0,25
	Như vậy đường thẳng (d) có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b$. Mặt khác đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -5 nên nó đi qua điểm có tọa độ $(-5; 0)$. Khi đó ta có: $0 = -\frac{1}{2} \cdot (-5) + b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$ (thỏa mãn $b \neq 2020$).	0,25
	Vậy $a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{5}{2}$.	0,25
	2.b (0,75 điểm)	
	$\begin{cases} 3(x-1) + 2(x-2y) = 10 \\ 4(x-2) - (x-2y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 13 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 33 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(3; \frac{1}{2}\right)$.	0,25

3 (2,5đ)	3.1a (0,5 điểm)	
	Với $m = 7$ ta có phương trình: $x^2 - 2(7+1)x + 7^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 48 = 0.$	0,25
	$\Delta' = (-8)^2 - 1 \cdot 48 = 16$ $x_1 = 8 + \sqrt{16} = 12; x_2 = 8 - \sqrt{16} = 4.$ Vậy với $m = 7$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 12; x_2 = 4.$	0,25
	3.1b (1,0 điểm)	
	$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (1) \quad (m \text{ là tham số}).$ $\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 - 1) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 1 = 2m + 2.$	0,25
	Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$ hay $2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1.$ Theo hệ thức Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$	0,25
	Ta có: $M = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$ $= (2m+2)^2 - 3(m^2 - 1) = 4m^2 + 8m + 4 - 3m^2 + 3 = m^2 + 8m + 7 = (m+4)^2 - 9.$	0,25
	Vì $m \geq -1$ nên $m+4 \geq 3.$ Từ đó $(m+4)^2 - 9 \geq 3^2 - 9 = 0$ hay $M \geq 0.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 0 đạt được khi và chỉ khi $m = -1.$ Vậy với $m = -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.	0,25
	3.2 (1,0 điểm)	
	Gọi số thùng nước sát khuẩn mà nhà máy phải sản xuất mỗi ngày theo kế hoạch là x (thùng). Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*.$	0,25
	Thời gian nhà máy phải sản xuất theo kế hoạch là: $\frac{2100}{x}$ (ngày). Trên thực tế, mỗi ngày nhà máy sản xuất được $x + 35$ (thùng). Thời gian nhà máy sản xuất trên thực tế là: $\frac{2100}{x+35}$ (ngày). Vì nhà máy hoàn thành công việc trước thời hạn quy định 3 ngày nên ta có phương trình: $\frac{2100}{x} - \frac{2100}{x+35} = 3 \quad (1).$	0,25
	Giải phương trình (1): $\frac{2100}{x} - \frac{2100}{x+35} = 3$ $\Leftrightarrow \frac{700}{x} - \frac{700}{x+35} = 1$ Suy ra: $700x + 24500 - 700x = x(x+35)$ $\Leftrightarrow x^2 + 35x - 24500 = 0$ ($\Delta = 35^2 + 4 \cdot 24500 = 99225; \sqrt{\Delta} = 315$). Giải phương trình trên ta tìm được: $x = 140$ (thỏa mãn điều kiện); $x = -175$ (loại).	0,25
	Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày nhà máy phải sản xuất 140 thùng nước sát khuẩn.	0,25

4 (3,5đ)	Hình vẽ (0,5 điểm)	
	Hình vẽ đúng cho câu a)	
		
	0,5	
	4.1.a (1,0 điểm)	
	Vì AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) với B và C là các tiếp điểm nên: $OB \perp AB, OC \perp AC$ hay $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$.	0,25
	Xét tứ giác $ABOC$, ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau. Do đó tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Xét đường tròn (O) , ta có: $\widehat{ABF} = \widehat{AKB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BF).	0,25
	Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AKB$, ta có: $\widehat{BAK}$ chung ; $\widehat{ABF} = \widehat{AKB}$ (chứng minh trên) Từ đó: $\triangle ABF \sim \triangle AKB$ (g.g).	0,25
	4.1.b (0,75 điểm)	
	Vì $\triangle ABF \sim \triangle AKB$ (chứng minh trên) nên $\frac{AB}{AK} = \frac{BF}{BK}$ (1)	0,25
	Chứng minh tương tự phần a) ta được $\triangle ACF \sim \triangle AKC$ (g.g). Mặt khác $\triangle ACF \sim \triangle AKC$ nên $\frac{AC}{AK} = \frac{CF}{CK}$ (2)	0,25
	Lại có $AB = AC$ (vì AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O)) (3) Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{BF}{BK} = \frac{CF}{CK} \Rightarrow BF \cdot CK = CF \cdot BK$.	0,25
	4.1.c (0,75 điểm)	
	Xét đường tròn (O) , ta có: $\widehat{FCE} = \widehat{CBF}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CF). Hay $\widehat{FCE} = \widehat{CBE}$. Xét $\triangle FCE$ và $\triangle CBE$, ta có: $\widehat{BEC}$ chung ; $\widehat{FCE} = \widehat{CBE}$ (chứng minh trên) Từ đó: $\triangle FCE \sim \triangle CBE$ (g.g).	0,25
	Suy ra $\frac{FE}{CE} = \frac{CE}{BE}$, do đó $\frac{FE}{AE} = \frac{AE}{BE}$ (vì $AE = CE$).	0,25
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle FAE$, ta có: $\widehat{AEB}$ chung ; $\frac{FE}{AE} = \frac{AE}{BE}$ (chứng minh trên) Từ đó: $\triangle ABE \sim \triangle FAE$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{FAE}$ hay $\widehat{ABF} = \widehat{FAE}$. Do đó EA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABF$.	0,25	

5 (1,0đ)	4.2 (0,5 điểm)	
	Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{\pi r} = \frac{65\pi}{5\pi} = 13 \text{ (cm)}$.	0,25
	Suy ra chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}$.	0,25
	5.a (0,25 điểm)	
	$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)$ $\Leftrightarrow 3(x^2 - xy + y^2) \geq (x^2 + xy + y^2)$ $\Leftrightarrow 2(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow 2(x - y)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng với mọi } x, y.$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Vậy $x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)$.	0,25
	5.b (0,75 điểm)	
	Đặt $a = \sqrt{x}$; $b = \sqrt{y}$; $c = \sqrt{z}$ ($a > 0$; $b > 0$; $c > 0$). Khi đó ta có $a + b + c = 2$. Đặt $A = \frac{x\sqrt{x}}{x + \sqrt{xy} + y} + \frac{y\sqrt{y}}{y + \sqrt{yz} + z} + \frac{z\sqrt{z}}{z + \sqrt{zx} + x}$ $= \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2}$ Đặt $B = \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + ca + a^2}$ Ta thấy $A - B = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2}$ $= (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0 \Rightarrow A = B$	0,25
	Vì $A = B$ nên $2A = A + B = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2}$ $2A = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} + \frac{(b+c)(b^2 - bc + c^2)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{(c+a)(c^2 - ca + a^2)}{c^2 + ca + a^2}$ Từ câu a) ta thấy với $x > 0$; $y > 0$ thì $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$ nên : $2A \geq \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2(a+b+c)}{3}$ $\Leftrightarrow A \geq \frac{a+b+c}{3}.$	0,25
	Mà $a + b + c = 2$ nên $A \geq \frac{2}{3}$ với mọi $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$ hay $x = y = z = \frac{4}{9}$.	0,25

*** Chú ý:**

- Trên đây chỉ trình bày một cách giải, nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó.
- Học sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu:

+ Có nhiều ý mà các ý phụ thuộc nhau, học sinh làm phần trên sai phần dưới đúng thì không cho điểm.

+ Có nhiều ý mà các ý không phụ thuộc nhau, học sinh làm đúng ý nào thì cho điểm ý đó.

- Bài hình học, học sinh vẽ sai hình thì không chấm điểm. Học sinh không vẽ hình mà vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.

- Bài làm có nhiều ý liên quan đến nhau, nếu học sinh công nhận ý trên mà làm đúng ý dưới thì cho điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.