

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm).

- 1) Giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3(x + 3y + 5) = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

- 1) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$
- 2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$).

Rút gọn biểu thức B . Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức B nhận giá trị âm.

Câu 3 (1,5 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m$ (m là tham số).

- 1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; 3)$.
- 2) Tìm điều kiện của m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) , xác định m để $(1 - x_1x_2)^2 + 2(y_1 + y_2) = 16$.

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hai đường cao BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M .

- 1) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.
- 2) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{EBM}$.
- 3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE .
- 4) Khi hai điểm B, C cố định và điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh $OA \perp EF$. Xác định vị trí của điểm A để tổng $DE + EF + FD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3} + \frac{1}{\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + 3} + \frac{1}{\sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 3} \leq \frac{1}{2}$$

-----HẾT-----

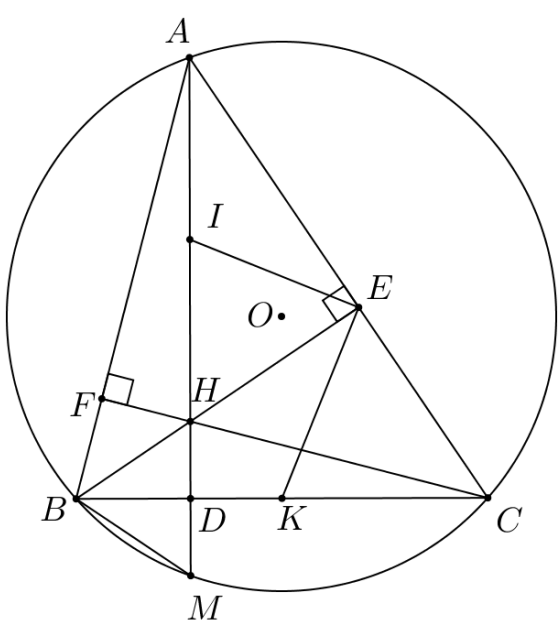
Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

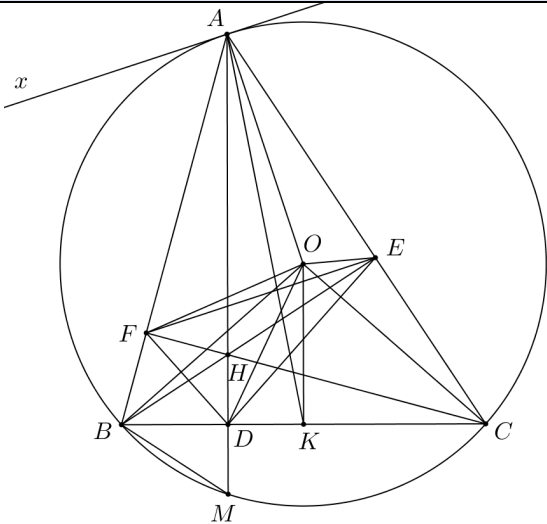
Cán bộ coi thi thứ nhất: Cán bộ coi thi thứ hai:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Lưu ý: - Các cách giải khác đáp án vẫn đúng cho điểm tương ứng theo biểu điểm
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0đ)	1. (1,0đ)	1) Giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$.	
		Phương trình đã cho có $a - b + c = 0$	0,5
		Suy ra phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.	0,5
	2. (1,0đ)	2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x + 3y + 5) = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases}$.	
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y + 15 = 2x + y \\ x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ 6y = -12 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -15 \\ y = -2 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 16 = -15 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1; -2)$.	0,25
Câu 2 (2,0đ)	1. (1,0đ)	1) Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.	
		$A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$	0,5
		$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1$	0,5
	2. (1,0đ)	2) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (với $x > 0, x \neq 1$). Rút gọn biểu thức B . Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức B nhận giá trị âm.	
		$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	
		$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1$.	0,25
		$B < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow x < 1$.	0,25
		Kết hợp điều kiện, ta có $0 < x < 1$.	0,25
Câu 3 (1,5đ)	1. (0,5đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = 2x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m$ (m là tham số).	
		1) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; 3)$.	
		Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2; 3)$ suy ra $3 = 2 \cdot (-2) + m$	0,25

	2. (1,0đ)	$\Leftrightarrow 3 = -4 + m \Leftrightarrow m = 7.$	0,25
		2) Tìm điều kiện của m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) , xác định m để $(1 - x_1 x_2)^2 + 2(y_1 + y_2) = 16$.	
		Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $2x^2 = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - m = 0 \quad (1)$	0,25
		Parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$. $\Delta' = 1 + 2m$, $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2} \quad (*)$.	0,25
		Khi đó theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$. $(1 - x_1 x_2)^2 + 2(y_1 + y_2) = 16 \Leftrightarrow (1 - x_1 x_2)^2 + 2(2x_1 + m + 2x_2 + m) = 16$ $\Leftrightarrow (1 - x_1 x_2)^2 + 4(x_1 + x_2) + 4m = 16 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{m}{2}\right)^2 + 4 + 4m = 16$ $\Leftrightarrow 1 + m + \frac{m^2}{4} + 4 + 4m = 16 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} + 5m + 5 = 16 \Leftrightarrow m^2 + 20m - 44 = 0$.	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -22 \end{cases}$. Đối chiếu điều kiện $(*)$, ta có $m = 2$.	0,25
Câu 4 (4,0đ)	1. (1,0đ)	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hai đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là M . 1) Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp.	
			
		(Học sinh không vẽ hình ý nào sẽ không được chấm điểm ý đó)	
		Ta có $\widehat{AEH} = 90^\circ$ (vì BE là đường cao).	0,25
		Ta có $\widehat{AFH} = 90^\circ$ (vì CF là đường cao).	0,25

	Suy ra $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$.	0,25
	Vậy tứ giác $AEHF$ nội tiếp (tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180°).	0,25
2. (1,0đ)	2) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{EBM}$.	
	Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung)	0,25
	Vì H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow AD \perp BC$.	0,25
	Lại có $\widehat{MAC} = \widehat{EBC}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{ACB}$)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{EBC}$	0,25
	$\Rightarrow BC$ là tia phân giác của $\widehat{EBM}$.	0,25
3. (1,0đ)	3) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$. Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE .	
	Gọi K là trung điểm BC suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE .	0,25
	Tam giác IAE cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA}$	0,25
	Tam giác KCE cân tại $K \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{KCE}$	0,25
	Mà $\widehat{DAC} + \widehat{DCA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IEA} + \widehat{KEC} = 90^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{IEK} = 90^\circ$	0,25
	Suy ra IE là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE .	
4. (1,0đ)	4) Khi hai điểm B, C cố định và điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh $OA \perp EF$. Xác định vị trí của điểm A để tổng $DE + EF + FD$ đạt giá trị lớn nhất.	
		
	Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp (2 đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc vuông) nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$).	0,25
	Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn $(O; R)$.	
	Ta có $Ax \perp OA$. $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AB}$). $\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AFE} \Rightarrow Ax \parallel EF$. $\Rightarrow EF \perp OA$.	0,25
	$\Rightarrow S_{AOE} + S_{AOF} = \frac{1}{2} OA \cdot EF = \frac{1}{2} R \cdot EF.$	
	Chứng minh tương tự $S_{BOF} + S_{BOD} = \frac{1}{2} R \cdot DF$. $S_{COD} + S_{COE} = \frac{1}{2} R \cdot DE$.	
	$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} R \cdot (DE + EF + FD).$	
	$\Rightarrow \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} R \cdot (DE + EF + FD).$	0,25

		$\Rightarrow DE + EF + FD = \frac{BC}{R} \cdot AD \leq \frac{BC}{R} AK.$ Mà $AK \leq AO + OK \Rightarrow \frac{BC}{R} \cdot AK \leq \frac{BC}{R} \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} \right).$ $\Rightarrow DE + EF + FD \leq \frac{BC}{R} \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} \right) \text{ không đổi.}$ Dấu “=” xảy ra khi ba điểm A, O, K thẳng hàng hay A là điểm chính giữa của cung lớn $\widehat{BC}$.	0,25
Câu 5 (0,5đ)		Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3} + \frac{1}{\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + 3} + \frac{1}{\sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 3} \leq \frac{1}{2}.$	
		Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$. BĐT cần cm có dạng $\frac{1}{x + 2y + 3} + \frac{1}{y + 2z + 3} + \frac{1}{z + 2x + 3} \leq \frac{1}{2}.$ Ta có: $x + 2y + 3 = (x + y) + (y + 1) + 2 \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{y} + 2 \text{ (Áp dụng BĐT Cô si)}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x + 2y + 3} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy} + 2\sqrt{y} + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{x + 2y + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{y} + 1}$ Tương tự ta có $\frac{1}{y + 2z + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{z} + 1}$ $\frac{1}{z + 2x + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{zx} + \sqrt{x} + 1}.$	0,25
		Ta có $\frac{1}{x + 2y + 3} + \frac{1}{y + 2z + 3} + \frac{1}{z + 2x + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{y} + 1} + \frac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{z} + 1} + \frac{1}{\sqrt{zx} + \sqrt{x} + 1} \right)$ Mặt khác: $\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{y} + 1} + \frac{1}{\sqrt{yz} + \sqrt{z} + 1} + \frac{1}{\sqrt{zx} + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{y} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y} + 1 + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy} + \sqrt{y}} = 1 \end{aligned}$ Do đó $\frac{1}{x + 2y + 3} + \frac{1}{y + 2z + 3} + \frac{1}{z + 2x + 3} \leq \frac{1}{2}.$ Hay $\frac{1}{\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3} + \frac{1}{\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + 3} + \frac{1}{\sqrt{c} + 2\sqrt{a} + 3} \leq \frac{1}{2}.$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.	0,25

---Hết---