

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây:

a. $\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{3}$;

b. $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$;

c. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là parabol (P) .

- Vẽ đồ thị (P) trên hệ trục tọa độ.
- Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng -1 và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng 1.
- Với (d) vừa tìm được, tìm giao điểm còn lại của (d) và (P) .

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*); với m là tham số.

- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có nghiệm.
- Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

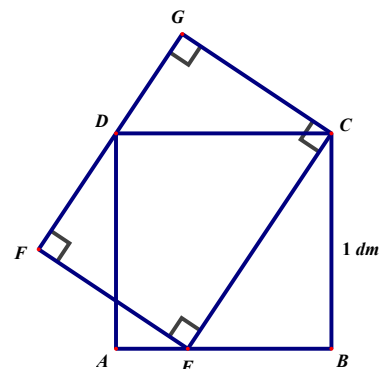
Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ các đường cao $AA'; BB'; CC'$ cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp.
- Kéo dài AA' cắt đường tròn (O) tại điểm D . Chứng minh rằng tam giác CDH cân.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho $ABCD$ là hình vuông có cạnh 1 dm . Trên cạnh AB lấy một điểm E . Dựng hình chữ nhật $CEFG$ sao cho điểm D nằm trên cạnh FG . Tính diện tích hình chữ nhật $CEFG$ (hình vẽ bên)



ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (3,0 điểm):

a) $\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}(x-1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=2$

b) $\begin{cases} x+y=7 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=9 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;3)$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$

PT đã cho trở thành: $t^2 - 3t - 4 = 0$ (1)

PT (1) có các hệ số: $a=1; b=-3; c=-4$

Vì $a-b+c=1-(-3)+(-4)=0$ nên PT (1) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 = -1 \text{ (loại)} \quad ; \quad t_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

Với $t=4 \Rightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm phân biệt: $x_1=2; x_2=-2$

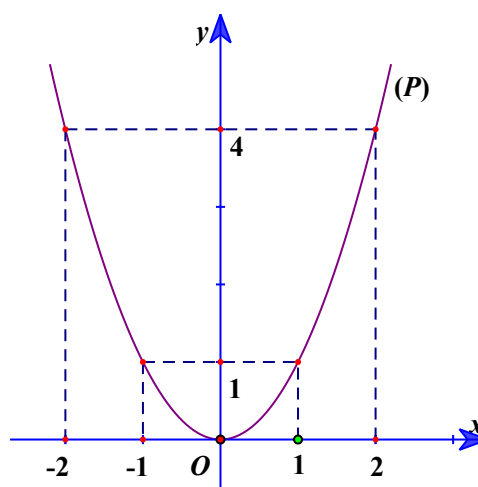
Bài 2 (2,0 điểm): Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là Parabol (P).

a) Vẽ đồ thị (P):

Bảng giá trị đặc biệt:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị:



b) PT đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b$

Vì (d) có hệ số góc bằng -1 nên $a = -1 \Rightarrow (d): y = -x + b$

Vì (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 1 nên thay $x=1$ vào hàm số $y = x^2$ ta được:
 $y = 1^2 = 1$

Thay tọa độ $(1;1)$ vào phương trình đường thẳng (d): $y = -x + b$, ta được:

$$1 = -1 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là: $y = -x + 2$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có các hệ số: $a = 1; b = 1; c = -2$

Vì $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ nên PT (*) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1^1 = 1$$

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow y_2 = (-2)^2 = 4$$

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt: $A(1;1)$ và $B(-2;4)$

Bài 3 (2,0 điểm):

Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2x + m - 1 = 0 \quad (*)$, với m là tham số

a) Tìm tất cả giá trị của m để PT (*) có nghiệm.

PT (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 4.1.(m-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m \leq 8$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

Vậy $m \leq 2$ thì PT (*) có nghiệm.

b) Với $m \leq 2$ thì theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Biến đổi biểu thức A:

$$A = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $A = 2^3 - 3.2.(m-1) = 8 - 6m + 6 = -6m + 14$

Vậy giá trị biểu thức A theo m là: $A = -6m + 14$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A:

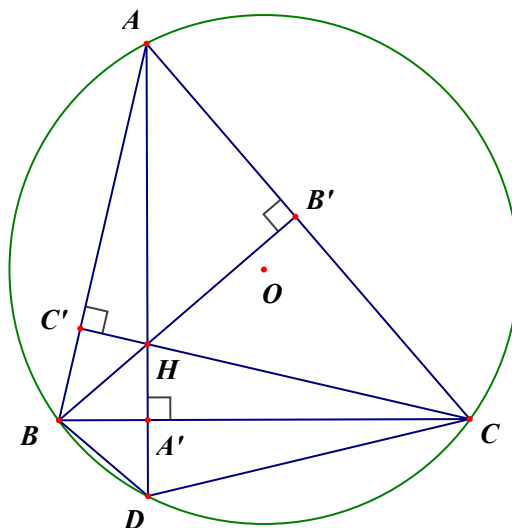
Vì $m \leq 2$ nên $-6m \geq -12 \Leftrightarrow -6m + 14 \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là 2 khi $m = 2$

Bài 4 (2,0 điểm):

Hình vẽ:



a) Xét tứ giác $AB'HC'$ ta có:

$$\widehat{AB'H} = 90^\circ \text{ (GT)}$$

$$\widehat{AC'H} = 90^\circ \text{ (GT)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB'H} + \widehat{AC'H} = 180^\circ$$

Mà $\widehat{AB'H}$ và $\widehat{AC'H}$ là hai góc đối nhau

Vậy tứ giác $AB'HC'$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn (O) (có 4 đỉnh nằm trên (O)) nên ta có:

$$\widehat{CDA} = \widehat{CBA} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } CA \text{)}$$

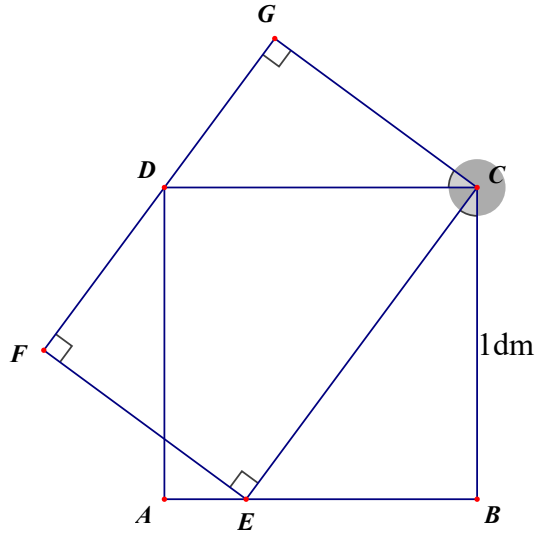
$$\text{Hay } \widehat{CDH} = \widehat{CBC'} \text{ (1)}$$

$$\text{Ta lại có: } \widehat{CHA'} = \widehat{CBC'} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BCC'}) \text{ hay } \widehat{CHD} = \widehat{CBC'} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra: } \widehat{CDH} = \widehat{CHD}$$

Vậy tam giác CDH cân tại C (có hai góc bằng nhau)

Bài 5 (1,0 điểm):



Ta có: $\widehat{DCG} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ với $\widehat{DCE}$)

Xét $\triangle DCG$ và $\triangle ECB$ ta có:

$$\widehat{DGC} = \widehat{EBC} = 90^0 \text{ (GT)}$$

$$\widehat{DCG} = \widehat{ECB} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle DCG$ đồng dạng với $\triangle ECB$ (g-g)

Suy ra: $\frac{DC}{EC} = \frac{CG}{CB} \Rightarrow EC.CG = DC.CB = 1.1 = 1$

Vậy diện tích của hình chữ nhật $CEFG$ là $1 \text{ (dm}^2\text{)}$

----- HẾT -----