

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

Môn thi: Toán Chuyên

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 07/6/2022

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P| - P = 0$.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - 5mx - 4m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 5mx_2 + 16m - 5 = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y - xy \\ x - y + 2 = xy \end{cases}$.

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC và AB lần lượt tại E và F . Gọi H là giao điểm của BE và CF , I là trung điểm của AH .

a) Chứng minh rằng tam giác IHE cân.

b) Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) AH cắt BC và EF lần lượt tại D và M . Chứng minh rằng $IE^2 = IM \cdot ID$.

d) IC cắt đường tròn (O) tại N (khác C). Chứng minh rằng B, M, N thẳng hàng.

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $B = 9.5^{2n} + 13.3^n$ luôn chia hết cho 22.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho ab là ước của $a^2 + b$.

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

2. Cho X là tập hợp gồm 26 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh trong X luôn tồn tại hai số x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $\{5; 10; 15\}$.

Hết