

Câu 1 (1,0 điểm) Cho biểu thức $T = \frac{\sqrt{a}-3}{a-9} \left(\frac{3\sqrt{a}+6}{a-4} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} \right)$, với $a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$

a) Rút gọn T

b) Xác định các giá trị của a để $T > 0$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1. Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 5$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2018}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}}$

Câu 3 (2,0 điểm)

Một người dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km bằng xe máy với vận tốc không đổi để đến B vào thời điểm định trước. Sau khi đi được 1 giờ người đó nghỉ 10 phút, do đó để đến B đúng thời điểm đã định, người đó phải tăng vận tốc thêm 6km/ giờ so với vận tốc ban đầu trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu của người đó.

Câu 4 (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc đều nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. AD là đường kính của đường tròn (O), H là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Đường thẳng MO cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh : $MD^2 = MB \cdot MC$

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường thẳng AD tại P. Chứng minh bốn điểm B, H, D, P cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh O là trung điểm của EF.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện : $a + b + c + ab + bc + ca = 6$

Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

---*---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (1đ) Cho biểu thức $T = \frac{\sqrt{a}-3}{a-9} \left(\frac{3\sqrt{a}+6}{a-4} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} \right)$, với $a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$

$$T = \frac{\sqrt{a}-3}{a-9} \left(\frac{3\sqrt{a}+6}{a-4} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} \right) = \frac{(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \left[\frac{3(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}+3} \cdot \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} = \frac{1}{\sqrt{a}-2}$$

a) với $a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9$: $T > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}-2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 2 \Leftrightarrow a > 4$; Kết hợp với đk suy

ra $a > 4$ và $a \neq 9$ thì $T > 0$

Bài 2: (2,0 điểm)

1. Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 2 = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 5$

Ta có: $\Delta' = \dots = m-1 \Rightarrow$ PT có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m + 2 \end{cases}$$

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow (2m-2)^2 - 3(m^2 - 3m + 2) = 5 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m^2 + m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \text{ (KTMDK)} \\ m_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \text{ (TMDK)} \end{cases}$$

Vậy.....

$$2. A = \frac{2018}{2 + \sqrt{2x - x^2 + 7}} = \frac{2018}{2 + \sqrt{8 - (x-1)^2}} \geq \frac{2018}{2 + \sqrt{8}} = \dots = 1009(\sqrt{2} - 1)$$

$$(\text{vì: } (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{8 - (x-1)^2} \leq \sqrt{8} \Rightarrow 2 + \sqrt{8 - (x-1)^2} \leq 2 + \sqrt{8} \Rightarrow \frac{2018}{2 + \sqrt{8 - (x-1)^2}} \geq \frac{2018}{2 + \sqrt{8}})$$

$$\Rightarrow A_{\min} = 1009(\sqrt{2} - 1) , \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Bài 3: (2,0 điểm)

Gọi vận tốc ban đầu của người đó là x (ĐK: $x > 0$)

Thời gian dự định đi từ A đến B là: $\frac{120}{x}$ (giờ)

Quãng đường đi 1 giờ đầu : x (km)

Vận tốc đi quãng đường còn lại là : $x+6$ (km/h)

Quãng đường còn lại: $120 - x$ (km)

Thời gian đi hết quãng đường còn lại: $\frac{120-x}{x+6}$ (giờ)

Vì sau khi đi được 1 giờ người đó nghỉ 10 phút ($\frac{1}{6}$ giờ) rồi đến B đúng thời điểm đã định

nên ta có phương trình:

$$1 + \frac{120-x}{x+6} + \frac{1}{6} = \frac{120}{x} \Rightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 42x - 4320 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 48 \text{ (TM)} \\ x_2 = -90 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc ban đầu của người đó là 48 km/h.

Bài 4: (3,5đ)

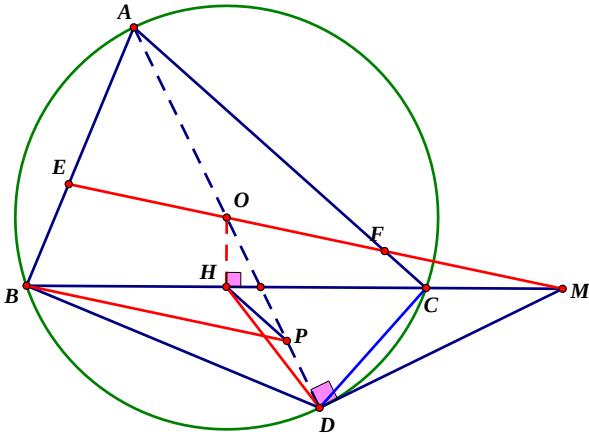
a. Chứng minh : $MD^2 = MB.MC$: Xét $\triangle MDB$ và $\triangle MCD$ có: góc DMB chung và $MDC = MBD$ (góc tạo bởi tia t^2 và dây cung với góc nt cùng chắn cung BD)

$$\Rightarrow \triangle MDB \sim \triangle MCD (g.g) \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MD} \Rightarrow MB.MC = MD^2 (1)$$

b. Chứng minh bốn điểm B, H, D, P cùng nằm trên một đường tròn.

$HB = HC \Rightarrow OH \perp BE$, lại có $MD \perp OD$ (T/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \angle OHM = \angle ODM = 90^\circ \Rightarrow H, D$ nằm trên đường tròn đường kính $OM \Rightarrow$ Bốn điểm B, H, D, P cùng nằm trên đường tròn đường kính OM

c. Chứng minh O là trung điểm của EF :



Vì tứ giác BDPH nội tiếp nên: $BHD = BPD$ (góc nt cùng chắn cung BD)

Vì $EF \parallel BP \Rightarrow BPD = EOD$ (đồng vị) mà $EOD = AOF$ (đối đỉnh) Suy ra: $BHD = AOF$

Lại có $DBH = OAF$ (góc nt cùng chắn cung CD), suy ra $\triangle OAF \sim \triangle HBD (g - g) \Rightarrow \frac{OA}{HB} = \frac{OF}{HD} (1)$

Ta có: $CHD = 180^\circ - BHD = 180^\circ - AOF = AOE$ và $EOA = HCD$ (góc nt cùng chắn cung BD)

suy ra $\triangle OAE \sim \triangle HCD (g - g) \Rightarrow \frac{OA}{HC} = \frac{OE}{HD} (2)$, lại có: $BH = HC$ (gt) (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra $\frac{OF}{HD} = \frac{OE}{HD} \Rightarrow OE = OF \Rightarrow O$ là trung điểm của EF

Bài 5: (1,0 điểm) Với mọi số thực x, y ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Áp dụng BĐT trên ta có:

$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \\ c^2 + 1 \geq 2c \\ a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \geq 2(a + b + c + ab + bc + ca) = 2.6 = 12 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3, \text{ dấu "}" xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = 1$$