

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (Vòng II)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình

$$2x + 1 + 2\sqrt{4x^2 + 6x} = 4\sqrt{5x - x^2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 30 + \sqrt[3]{x+y+120}. \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$4^x + (1+3^y)(1+7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2).$$

2) Với x, y, z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^{14} - x^6 + 3}{x^2 y^2 + zx + zy} + \frac{y^{14} - y^6 + 3}{y^2 z^2 + xy + xz} + \frac{z^{14} - z^6 + 3}{z^2 x^2 + yz + yx}.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB > BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC .

1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F . Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC . Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , D là giao điểm của AH và BC . M là trung điểm BC . K đối xứng với A qua BC . N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM . Lấy S thuộc BC sao cho $NS \perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR \cdot AH = AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ \perp AS$ và $SQ \perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN .

Câu IV. (1 điểm)

Viết một trăm số nguyên dương đầu tiên $1, 2, 3, \dots, 100$ vào một bảng ô vuông kích thước 10×10 một cách tùy ý sao cho mỗi ô được viết đúng một số. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (2 ô có cạnh chung) mà hai số viết ở hai ô này có hiệu lớn hơn hoặc bằng 10.

-----HẾT-----

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (3 điểm)

1) Giải phương trình

$$2x + 1 + 2\sqrt{4x^2 + 6x} = 4\sqrt{5x - x^2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 30 + \sqrt[3]{x+y+120}. \end{cases}$$

Lời giải.

1) Điều kiện: $0 \leq x \leq 5$. Ta biến đổi phương trình thành

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{4x+6} + 4x + 6 = 4x + 4\sqrt{x}\sqrt{5-x} + 5 - x.$$

Sử dụng hằng đẳng thức, ta thu được

$$(\sqrt{x} + \sqrt{4x+6})^2 = (2\sqrt{x} + \sqrt{5-x})^2$$

Suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{4x+6} = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ (do từng vế đều không âm), hay

$$\sqrt{4x+6} = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}.$$

Bình phương hai vế của phương trình này ta có

$$4x + 6 = x + 5 - x + 2\sqrt{x(5-x)}$$

hay $4x + 1 = 2\sqrt{x(5-x)}$. Tiếp tục ta bình phương hai vế với điều kiện $4x + 1 \geq 0$ (đã thỏa mãn) được

$$16x^2 + 8x + 1 = 4x(5-x).$$

Giải phương trình trên ta thu được $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{10}$ (đều thỏa mãn điều kiện).

Vậy, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{10}$.

2) Đặt $S = x + y, P = xy$. Ta có

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = S^3 - 3SP.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} SP = 30, \\ S^3 - 3SP = 30 + \sqrt[3]{S+120}. \end{cases}$$

Thay $SP = 30$ vào phương trình thứ hai ta có

$$S^3 = 120 + \sqrt[3]{S+120}.$$

hay $S^3 + S = (S+120) + \sqrt[3]{S+120}$. Ta nhận thấy

- Nếu $S > \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 > S+120$, suy ra

$$S^3 + S > (S+120) + \sqrt[3]{S+120},$$

loại.

- Nếu $S < \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 < S+120$, suy ra

$$S^3 + S < (S+120) + \sqrt[3]{S+120},$$

loại.

Như vậy ta có $S = \sqrt[3]{S+120}$, hay $S^3 - S - 120 = 0$. Giải phương trình ta thu được $S = 5$, khi đó $P = \frac{30}{S} = 6$. Vậy ta có

$$\begin{cases} x+y &= 5, \\ xy &= 6. \end{cases}$$

Theo Vi-ét đảo thì x, y là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - 5X + 6 = 0.$$

Giải phương trình ta thu được $(x, y) = (2, 3)$ hoặc $(3, 2)$.

Vậy, hệ đã cho có hai nghiệm (x, y) là $(2, 3)$ và $(3, 2)$.

□

Câu 2: (3 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$4^x + (1 + 3^y)(1 + 7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

2) Với x, y, z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^{14} - x^6 + 3}{x^2y^2 + zx + zy} + \frac{y^{14} - y^6 + 3}{y^2z^2 + xy + xz} + \frac{z^{14} - z^6 + 3}{z^2x^2 + yz + yx}$$

Lời giải.

1) **Cách 1.** Ta có các biến đổi phương trình sau

$$\begin{aligned} 4^x + (1 + 3^y)(1 + 7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2) &\Leftrightarrow 2^{2x} - 1 + 2 + 3^y + 7^y + 2 \cdot 1^y = 2^x(3^y + 7^y + 2) \\ &\Leftrightarrow (2^x - 1)(3^y + 7^y + 1 - 2^x) = 2 \cdot 1^y \end{aligned} \quad (1)$$

Ta chứng minh $\gcd(2^x - 1, 3^y + 7^y + 1 - 2^x) = 1$. Thật vậy, nếu $\gcd(2^x - 1, 3^y + 7^y + 1 - 2^x) > 1$ thì gọi p là ước nguyên tố chung của $2^x - 1, 3^y + 7^y + 1 - 2^x$. Suy ra $p \mid 3^y + 7^y$. Chú ý là $3^x + 7^y$ đều không chia hết cho 3, 7 nên $p \neq 3, 7$. Lại có $p \mid 2 \cdot 1^y$ nên $p \in \{2, 1\}$ mâu thuẫn. Vậy $\gcd(2^x - 1, 3^y + 7^y + 1 - 2^x) = 1$. Ta xét hai trường hợp sau

- Nếu x là số chẵn thì $2^x - 1$ chia hết cho 3 và $3^y + 7^y + 1 - 2^x$ chia 3 dư 1. Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 3^y \\ 3^y + 7^y + 1 - 2^x = 7^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x = 3^y + 1$. Chú ý là $3^y \equiv 1, 3 \pmod{8}$ nên $3^y + 1$ không chia hết cho 8. Từ đó $x = 2$ và $y = 1$. Vậy $(x, y) = (2, 1)$.

- Nếu x là số lẻ thì $2^x - 1$ chia 3 dư 1 và $3^y + 7^y + 1 - 2^x$ chia hết cho 3. Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 7^y \\ 3^y + 7^y + 1 - 2^x = 3^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x = 7^y + 1$. Vế phải chia 7 dư 1 nên vế trái chia 7 dư 1. Từ đó $x = 3k, k \in \mathbb{N}^*$ và thay vào phương trình được

$$(2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1) = 7^y.$$

Vì $\gcd(2^k - 1, 2^{2k} + 2^k + 1) \in \{1, 3\}$ nên $\gcd(2^k - 1, 2^{2k} + 2^k + 1) = 1$. Vì $2^{2k} + 2^k + 1 > 1$ nên $2^k - 1 = 1$ suy ra $k = 1$ và $7^y = 7$ nên $y = 1$ và $x = 3k = 3$. Vậy $(x, y) = (3, 1)$.

Vậy tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn là $(2, 1), (3, 1)$.

Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(2^x - 7^y - 1)(2^x - 3^y - 1) = 0.$$

Tới đây giải giống hai trường hợp ở trên.

- 2) Ta có $3(x^{14} - x^6 + 3) = (3x^{14} + 4) - 3x^6 + 5 \geq 7x^6 - 3x^6 + 5 = 4x^6 + 5$ theo bất đẳng thức AM-GM. Lại có cũng theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$4x^6 + 5 = (x^6 + x^6 + 1) + (x^6 + x^6 + 1) + 3 \geq 3(x^4 + x^4 + 1) \geq 3(x^4 + 2x^2).$$

Suy ra

$$M \geq \sum \frac{x^4}{x^2y^2 + xz + yz} + 2 \sum \frac{x^2}{x^2y^2 + xz + yz}$$

và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu cho vế trái, ta có

$$M \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(x + y + z)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(xy + yz + zx)} \geq \frac{3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 6(xy + yz + zx)}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(xy + yz + zx)} = 3.$$

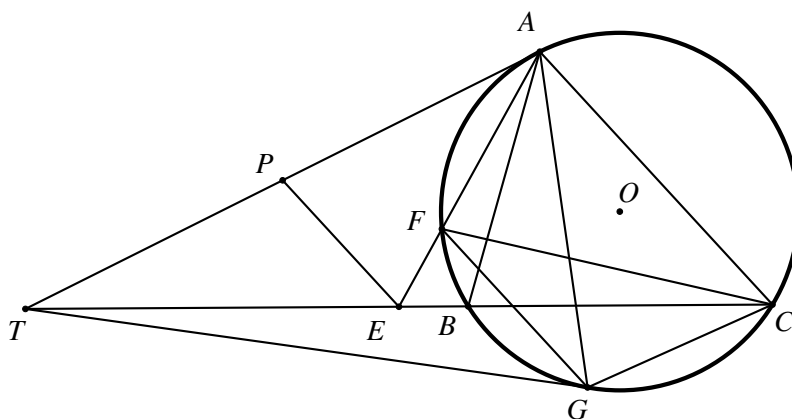
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Giá trị nhỏ nhất của M là 3.

□

Câu 3: (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB > BC$. Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC .

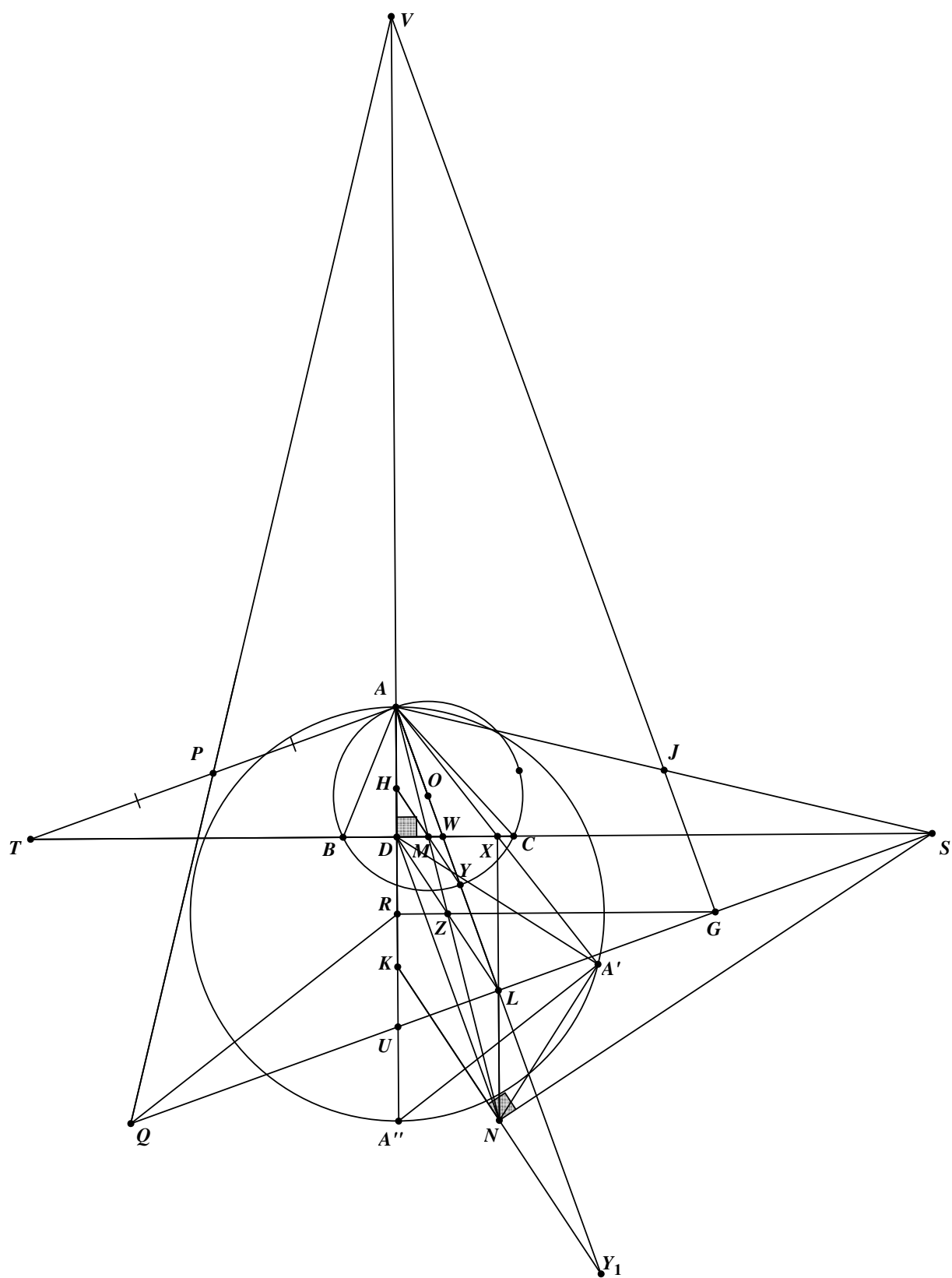
- 1) Chứng minh rằng tứ giác $APEB$ nội tiếp.
- 2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F . Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC . Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.
- 3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , D là giao điểm của AH và BC . M là trung điểm BC . K đối xứng với A qua BC . N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM . Lấy S thuộc BC sao cho $NS \perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR \cdot AH = AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ \perp AS$ và $SQ \perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN .



Lời giải.

- 1) Vì AT là tiếp tuyến của (O) nên ta được $TA^2 = TB \cdot TC$. Như vậy, ta được $TP \cdot TA = \frac{1}{2}TA^2 = \frac{1}{2}TB \cdot TC = TB \cdot TE$ và vì thế tứ giác $APEB$ là tứ giác nội tiếp.
- 2) Vì EP là đường trung bình của $\triangle TAC$, $AFGC$ là hình thang cân và AT là tiếp tuyến của (O) nên ta thu được $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = \widehat{GCA} = \widehat{TAG}$ và $\widehat{GAC} = \widehat{FCA} = \widehat{TAF} = \widehat{PAE}$. Như vậy, ta được $\triangle AEP \sim \triangle ACG$ (g.g) và dẫn đến $\frac{AE}{AC} = \frac{AP}{AG}$. Lại chú ý rằng $AT = 2AP$ và $AC = 2EP$, ta thu được $\frac{AE}{EP} = \frac{2AE}{AC} = \frac{2AP}{AG} = \frac{AT}{AG}$. Kết hợp với $\widehat{AEP} = \widehat{TAG}$ ta thu được $\triangle AEP \sim \triangle TAG$ (c.g.c) và vì thế $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3)



Gọi AY là đường kính của (O) , L và Y_1 là giao của AY với QS và KN .

Theo tính chất quen thuộc ta có M là trung điểm của HY nên theo bổ đề hình thang ta được N là trung điểm của KY_1 .

Vì $SN \perp KY_1$ và SD là trung trực AK nên S là tâm ngoại tiếp của tam giác AKY_1 .

Vì $QS \perp AO$ nên $AY_1 \perp SL$ mà S là tâm (AKY_1) nên L là trung điểm AY_1 . Theo tính chất đường trung bình ta được $DN \parallel AO$ và $NL \parallel AD$ suy ra tứ giác $ADNL$ là hình bình hành. Gọi Z là giao của DL và AN thì ta được Z là trung điểm AN và DL .

Gọi A'' là đối xứng của A qua R , X là giao của NL với BC , A' là giao của AX với (R) thì $XA' \perp A'A''$ nên A' thuộc đường tròn (DN) .

Áp dụng định lý Thales ta được

$$\frac{AD}{AA''} = \frac{AD}{2AR} = \frac{AH}{2AD} = \frac{AM}{2AZ} = \frac{AM}{AN}.$$

Theo định lý Thales đảo ta suy ra $NA'' \parallel DM$ nên $NA'' \perp DA''$ suy ra $DXNA''$ là hình chữ nhật và D, X, A'', N thuộc (DN) .

Gọi U, V lần lượt là giao của QS và QP với AH ; W là giao của AO và BC .

Ta có $\triangle QUV \sim \triangle AWS(g.g)$ (do 2 tam giác này có các cặp cạnh tương ứng vuông góc).

Từ V kẻ $VG \perp QS$ vì $SQ \parallel AT$ nên $VG \perp AT$.

Vì đường qua T vuông góc với AS và đường qua S vuông góc với AT đồng quy tại trực tâm tam giác ATS trên AH nên VG phải đi qua trung điểm J của AS .

Mặt khác $JG \parallel AL$ (cùng vuông góc với QS nên G là trung điểm LS).

Theo tính chất đường trung bình của $\triangle ANA''$, $\triangle DLS$ ta được $GZ \parallel DS$, $RZ \parallel NA''$ mà $NA'' \parallel DS$ nên G, Z, R thẳng hàng và $GR \perp VU$.

Ta có $\widehat{VGU} = \widehat{WLS} = 90^\circ$ và $\widehat{VUG} = \widehat{LWS}$ nên $\triangle VGU \sim \triangle SLW(g.g)$.

Vì LX và GR là hai đường cao tương ứng của hai tam giác này nên theo tính tương ứng của đồng dạng ta được tỷ lệ thức sau $\frac{VR}{RU} = \frac{WX}{XS}$.

Từ đây kết hợp với $\triangle QUV \sim \triangle AWS(g.g)$ ta được $\triangle QUR \sim \triangle AWX(c.g.c)$ suy ra QR vuông góc AX . Vì $QR \perp AA'$ mà R thuộc trung trực AA' nên A và A' đối xứng nhau qua QR .

Vậy điểm đối xứng của A qua QR là A' thuộc (DN) .

□

Câu 4: (1 điểm)

Viết 100 số nguyên dương đầu tiên $1, 2, \dots, 100$ vào một bảng ô vuông kích thước 10×10 một cách tùy ý sao cho mỗi ô vuông được viết đúng một số. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (hai ô có cạnh chung) mà hai số được viết ở hai ô này có hiệu lớn hơn hoặc bằng 10.

Lời giải. Cách 1. Ta giải bài toán tổng quát: Điền các số $1, 2, \dots, n^2$ với $n > 1$ vào các ô vuông của bảng cỡ $n \times n$. Khi đó tồn tại hai ô vuông kề nhau (chung cạnh) chứa hai số x, y mà $|x - y| \geq n$. Kí hiệu m_k, M_k tương ứng là số nhỏ nhất và số lớn nhất của hàng thứ k với $k = 1, 2, \dots, n$. Chú ý là $m_1, m_2, \dots, m_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ đôi một phân biệt. Đặt

$$m = \max(m_1, m_2, \dots, m_n) \quad \text{và} \quad M = \min(M_1, M_2, \dots, M_n).$$

Xét hai trường hợp

- Nếu $m < M$ thì ta có $m_k \leq m < M_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Điều này suy ra với hàng k bất kỳ thì tồn tại hai số a_k, b_k thuộc hàng đó sao cho $a_k \leq m < b_k$ và với mỗi hàng k ta chọn cặp (a_k, b_k) thuộc hai ô kề nhau ở hàng k . Vì $b_1, b_2, \dots, b_n$ lớn hơn m và các số $b_1, b_2, \dots, b_n$ là đôi một phân biệt nên tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $b_k \geq n + m$ và do đó

$$b_k - a_k \geq (m + n) - m = n.$$

- Nếu $m > M$ thì gọi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ là các chỉ số sao cho $m_i > M = M_j$. Khi đó tại mỗi cột luôn tồn tại các số không vượt quá M (ví dụ như số hàng j) và các số lớn hơn M (ví dụ như số ở hàng i). Khi đó với cột k bất kỳ tồn tại a_k, b_k sao cho $a_k \leq M < b_k$ và a_k, b_k thuộc hai ô kề nhau của cột k . Tương tự như trường hợp đầu tiên thì ta cũng có tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $b_k \geq M + n$. Suy ra

$$b_k - a_k \geq (M + n) - M = n.$$

Trong mọi tình huống ta đều có điều phải chứng minh.

Cách 2. Phạm Việt Hưng Giả sử phản chứng, tồn tại cách điền để không tồn tại x, y như vậy. Ta lần lượt điền các số bắt đầu từ 1 vào bảng ô vuông, xét thời điểm đầu tiên mà cả n cột đều đã được điền số. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu tồn tại cột nào đó đã được phủ hoàn toàn, ta sẽ đổi vai trò của hàng và cột (xét thời điểm đầu tiên cả n hàng đều có số). Nếu khi đó lại tồn tại một hàng được phủ hoàn toàn, thì tức là hai thời điểm đang xét trùng nhau. Điều này là không thể vì ô vừa được thêm phải là ô cuối cùng của hàng và cột đó, xét thời điểm ngay trước đó cho ta tất cả các hàng đều đã được điền.
- Nếu không tồn tại cột đã phủ hoàn toàn, do mỗi cột đều có ô đã điền, ta có thể chọn ra ở cột thứ i được cặp ô A_i, B_i mà A_i được điền còn B_i thì chưa.

Cần có $B_i - A_i \leq n - 1$, kéo theo $B_i \leq \max(A_1, A_2, \dots, A_n) + n - 1, \forall i$.

Mà các số từ 1 đến $\max(A_i)$ đều đã được điền nên $B_i > \max(A_i)$, vô lý do n số B_i phân biệt.

Các trường hợp cho ta giả sử sai và ta có điều phải chứng minh. □