

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (Vòng II)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

- 1) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \right) = \sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}.$$

- 2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \\ 3x + 2y + 1 = 2\sqrt{2x + y + 6}. \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đẳng thức
 $(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4.$
- 2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} c \leq b < a \leq 3, & b^2 + 2a \leq 10, & b^2 + 2a + 2c \leq 14, \\ (a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab \leq 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4a^2 + b^4 + 2b^2 + 4c^2.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) . Điểm P nằm trong tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, AB . Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K) .

- 1) Chứng minh rằng AP vuông góc BC .
- 2) Chứng minh rằng $AP = 2OK$.
- 3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại hai điểm Q và R . Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR .

Câu IV. (1 điểm)

Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn $A_k A_{k+1}$ bằng k (đơn vị dài), với $k = 1, 2, \dots, 29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{29} A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được 2 số nguyên dương $1 \leq j < i \leq 29$ sao cho hai đoạn $A_i A_{i+1}, A_j A_{j+1}$ được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.

—HẾT—

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Giải chi tiết đề thi Toán Chuyên trường THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên

Nguyễn Duy Khương - Nguyễn Hoàng Việt - Trịnh Đình Triển - Trương Mạnh Tuấn -
TQĐ - Nguyễn Văn Hoàng - Nguyễn Khang

1 Câu I

- 1) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \right) = \sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$$

- 2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \\ 3x + 2y + 1 = 2\sqrt{2x + y + 6} \end{cases}$$

Lời giải.

- 1) Từ giả thiết suy ra $ab + bc + ca = abc$. Ta có:

$$\frac{1}{a+bc} = \frac{a}{a^2+abc} = \frac{a}{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{1}{b+ca} = \frac{b}{(b+c)(b+a)}; \frac{1}{c+ab} = \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

Từ đó suy ra :

$$VT = \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

Và :

$$VP = \sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (\text{do } a, b, c > 0) \quad (2)$$

Từ (1),(2), ta suy ra điều phải chứng minh.

- 2) Điều kiện: $2x + y + 6 \geq 0$. Nhân 4 vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$4(2x^2 + 3xy + y^2) - 24 = 0$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geq 0 \\ (3x + 2y + 1)^2 - 4(2x + y + 6) = 0 \end{cases}$$

Ta viết lại thành hệ mới

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geq 0(1) \\ 4(2x^2 + 3xy + y^2) - 24 = 0(2) \\ (3x + 2y + 1)^2 - 4(2x + y + 6) = 0(3) \end{cases}$$

Lấy phương trình (3) trừ đi phương trình (2), về với về, ta thu được

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Mặt khác do

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

- Nếu $x = 1, y = 1$, đối chiếu điều kiện $2x + y + 6 \geq 0, 3x + 2y + 1 \geq 0$ ta thấy đều thỏa.
- Nếu $x = 1, y = -4$ ta có $2x + y + 6 = 4 > 0, 3x + 2y + 1 = -4 < 0$, không thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy chỉ có một cặp giá trị $(x, y) = (1, 1)$ là thỏa mãn.

2 Câu II

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x + y)(5x + y)^3 + xy^3 = (5x + y)^3 + x^2y^3 + xy^4.$$

2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} c \leq b < a \leq 3, b^2 + 2a \leq 10, b^2 + 2a + 2c \leq 14 \\ (a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab \leq 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4a^2 + b^4 + 2b^2 + 4c^2.$$

Lời giải

1) Ta biến đổi như sau

$$(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4.$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(5x+y)^3 = xy^3(x+y-1).$$

Vì x, y là hai số nguyên dương nên $x+y > 1$. Do đó, ta suy ra

$$(5x+y)^3 = xy^3.$$

Do đó, ta suy ra x cũng là lập phương của một số nguyên dương. Đặt $x = z^3$, ta có

$$(5z^3 + y)^3 = (zy)^3 \Leftrightarrow 5z^3 + y = zy \Leftrightarrow y(z-1) = 5z^3.$$

Nếu $z = 1$ thì ta suy ra mâu thuẫn. Xét $z \neq 1$. Khi đó, ta có $z-1 \mid 5z^3$. Vì

$$5z^3 \equiv 5 \pmod{z-1}$$

nên ta suy ra $z-1 \mid 5$. Từ đây, ta tìm được $z \in \{2; 6\}$. Suy ra

$$(z, y) \in \{(2, 40); (6, 216)\} \Rightarrow (x, y) \in \{(8, 40); (216, 216)\}$$

2) *Lời giải (Trịnh Đình Triển).*

Ta có:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab - 2a(a^2 + 1) - 2b(b^2 + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1 - 2b)(b^2 + 1 - 2a) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 + 1 \leq 2a$$

Ta có: $P = (2a)^2 + (b^2 + 1)^2 + (2c)^2 - 1$.

Do đó: $P - 76 = (2a - 6)(2a + 6) + (b^2 - 4)(b^2 + 6) + (2c - 4)(2c + 4)$

$= (2a - b^2)(2a - 6) + (b^2 - 2c + 2)(2a + b^2 - 10) + (2c + 4)(2a + 2c + b^2 - 14) \leq 0$ do

đó: $P \leq 76$. Do đó $\max P = 76$ với $(a, b, c) = (3, 2, 2)$.

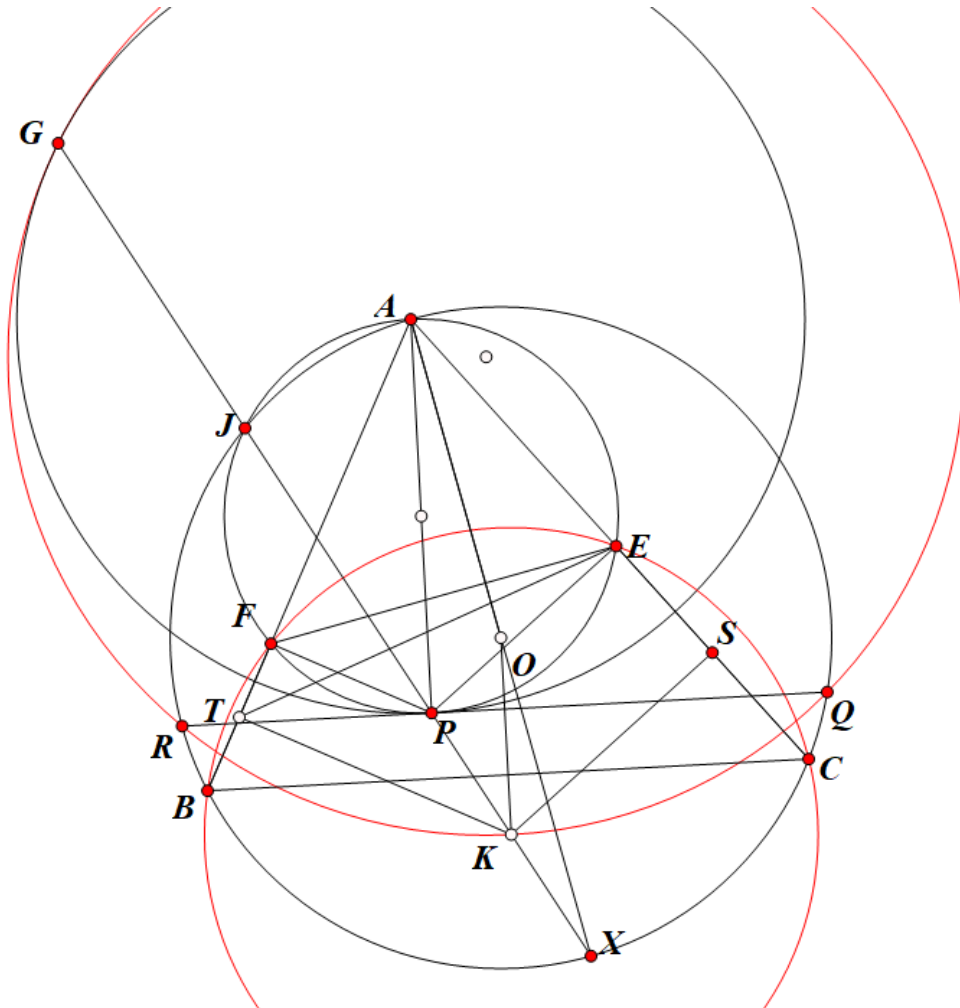
3 Câu III

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) , P thay đổi nằm trong tam giác sao cho E, F là hình chiếu của P lên CA, AB thì $BFEC$ nội tiếp đường tròn (K) .

1) Chứng minh rằng: $AP \perp BC$.

2) Chứng minh rằng: $AP = 2OK$.

3) Đường thẳng qua P vuông góc AP cắt (O) tại Q, R . Chứng minh rằng: $(A; AP)$ tiếp xúc (KQR) .



Lời giải (Nguyễn Duy Khương).

- Do tứ giác $BFEC$ nội tiếp dẫn đến: $\angle AEF = \angle ABC$ để ý rằng: $\angle OAC = 90^\circ - \angle B$ dẫn đến: $OA \perp EF$. Ta có: $\angle OAC = 90^\circ - \angle AEF = \angle PAF$ (do AP là đường kính của (AEF)). Do đó dẫn đến: $\angle PAB + \angle B = 90^\circ$ suy ra: $AP \perp BC$.
- Gọi (AEF) cắt (O) tại điểm thứ hai là J . Gọi S, T lần lượt là trung điểm của EC và FB ta có: $\angle JFB = 180^\circ - \angle JFA = 180^\circ - \angle JEA = \angle JEC$ đồng thời $\angle JBF = \angle JCE$ do đó: tam giác JFB đồng dạng tam giác JEC dẫn đến: tam giác JTF đồng dạng tam giác JES theo trường hợp cạnh góc cạnh dẫn đến: $\angle JTA = \angle JSA$ do đó: J, T, S, A, K cùng thuộc 1 đường tròn.

Dẫn đến: J, P, K thẳng hàng và đường thẳng này đi qua X là đối xứng của A qua O . Do đó để ý rằng: $PECX$ là hình thang vuông mà SK là đường trung bình của hình thang này dẫn đến: K là trung điểm PX hay là: $AP = 2OK$.

3) Gọi G đối xứng P qua J .

Ta có: $\angle AJP = 90^\circ$ dẫn đến: $AG = AP$ hay G thuộc $(A; AP)$.

Ta có: K là trung điểm PX do đó: $PX \cdot PJ = 2PK \cdot PJ = PK \cdot 2PJ = PK \cdot PG = PQ \cdot PR$ (do tứ giác $JRXQ$ nội tiếp (O)). Suy ra: G thuộc (KQR) .

Bổ đề: Cho $(O; R)$ có dây cung AB . Đường tròn (X) tiếp xúc trong (O) tại G và tiếp xúc AB tại P . Khi đó: GP đi qua trung điểm cung AB .

Bổ đề này và bổ đề đảo của nó khá hiển nhiên, các bạn tự chứng minh lại.

Áp dụng bổ đề đảo của bổ đề trên cho đường tròn (KRQ) và đường tròn $(A; AP)$ với dây cung RQ thì ta thu được: $(A; AP)$ tiếp xúc (KRQ) hay điều cần chứng minh.

4 Câu IV

Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn $A_k A_{k+1}$ bằng k (đơn vị dài), với $k = 1, 2, \dots, 29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1 A_2, \dots, A_{29} A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng một màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được hai số nguyên dương $1 \leq j < i \leq 29$ sao cho hai đoạn $A_i A_{i+1}$ và $A_j A_{j+1}$ được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.

Lời giải. (Trương Mạnh Tuấn)

Gọi d_i là màu $A_i A_{i+1}$; $i = 1, 29$; $d_i \in \{1, 2, 3\}$.

Phản chứng $d_i \neq d_j \forall |i - j|$ là số chính phương.

$$d_i \neq d_{i+9}, d_i \neq d_{i+16}, d_i \neq d_{i+25}, d_{i+9} \neq d_{i+25}, d_{i+16} \neq d_{i+25}$$

Mà trong $d_i, d_{i+9}, d_{i+16}, d_{i+25}$ có 2 số bằng nhau, nên $d_{i+9} = d_{i+16} \forall i \geq 1$.

Không giảm tổng quát giả sử $d_1 = 1, d_2 = 2$. Có $d_{10} \neq d_1 = 1$.

- Nếu $d_{10} = 3 = d_{i+9} \Rightarrow d_{17} = d_{i+16} = d_{1+9} = d_{10} = 3$.

$$d_{26} \neq d_{17} = 3, d_{26} \neq d_1 = 1 \Rightarrow d_{26} = 2.$$

$$d_{11} \neq d_{10} = 3, d_{11} \neq d_2 = 2 \Rightarrow d_{11} = 1.$$

$$d_{27} \neq d_{26} = 2, d_{27} \neq d_{11} = 1 \Rightarrow d_{27} = 3 \Rightarrow d_{20} = 3.$$

$$d_{26} = 2 \Rightarrow d_{19} = 2, d_{20} = 3 \Rightarrow d_{13} = 3.$$

Suy ra $d_{13} = d_{17}$ (mâu thuẫn)

- Nếu $d_{10} = 2 \Rightarrow d_{24} = d_{17} = d_{10} = 2$

$$d_{26} \neq d_{17} = 2, d_{26} \neq d_1 = 1 \Rightarrow d_{26} = 3 = d_{19} = d_{12}.$$

Suy ra $d_{11} = 1$ do $d_{11} \neq d_{12} = 3, d_{11} \neq d_{10} = 2. \Rightarrow d_{25} = d_{18} = d_{11} = 1$.

$$d_3 \neq d_{12}, d_3 \neq d_2 \text{ nên } d_3 = 1 \Rightarrow d_{28} \neq d_3 = 1, d_{28} \neq d_{29} = 2 \text{ nên } d_{28} = 3.$$

$\Rightarrow d_{28} = d_{29} = d_{17} = d_{10} = 3$ nhưng do $d_{10} = 2$, ta có điều mâu thuẫn.

Vậy tồn tại i, j sao cho $|i - j|$ là số chính phương và $d_i = d_j$.