

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$.

- Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Bài 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $2x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 .

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1)$.

Bài 3. (0,75 điểm)

Quy tắc sau đây cho ta biết CAN, CHI của năm X nào đó.

Để xác định CAN, ta tìm số dư r trong phép chia X cho 10 và tra vào bảng 1.

Để xác định CHI, ta tìm số dư s trong phép chia X cho 12 và tra vào bảng 2.

Ví dụ: năm 2020 có CAN là Canh, CHI là Tí.

Bảng 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CAN	Canh	Tân	Nhâm	Quý	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ

Bảng 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CHI	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tí	Sửu	Dần	Mẹo	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi

- Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN, CHI của năm 2005?
- Bạn Hằng nhớ rằng Nguyễn Huệ lên ngôi hoàng đế, hiệu là Quang Trung vào năm Mậu Thân nhưng không nhớ rõ đó là năm bao nhiêu mà chỉ nhớ là sự kiện trên xảy ra vào cuối thế kỉ 18. Em hãy giúp Hằng xác định chính xác năm đó là năm bao nhiêu?

Bài 4. (0,75 điểm)

Cước điện thoại y (nghìn đồng) là số tiền mà người sử dụng điện thoại cần trả hàng tháng, nó phụ thuộc vào lượng thời gian gọi x (phút) của người đó trong tháng. Mỗi liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Hãy tìm a, b biết rằng nhà bạn Nam trong tháng 5 đã gọi 100 phút với số tiền là 40 nghìn đồng và trong tháng 6 gọi 40 phút với số tiền là 28 nghìn đồng.

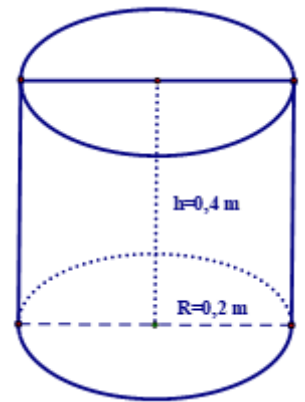
Bài 5. (1,0 điểm)

Theo quy định của cửa hàng xe máy, để hoàn thành chỉ tiêu trong một tháng, mỗi nhân viên phải bán được trung bình một chiếc xe máy trong một ngày. Nhân viên nào hoàn thành chỉ tiêu trong một tháng thì nhận lương cơ bản là 8000000 đồng. Nếu trong một tháng nhân viên nào vượt chỉ

tiêu thì được thưởng thêm 8% tiền lời của số xe được bán vượt chỉ tiêu đó. Trong tháng 5 (có 31 ngày), anh Thành nhận được số tiền là 9800000 đồng (bao gồm cả lương cơ bản và tiền thưởng thêm tháng đó.). Hỏi anh Thành đã bán được bao nhiêu chiếc xe máy trong tháng 5, biết rằng số xe bán ra thì cửa hàng thu được tiền lời được 2500000 đồng.

Bài 6. (1,0 điểm)

Anh Minh vừa mới xây một cái hồ trữ nước cạnh nhà có hình hộp chữ nhật kích thước $2m \times 2m \times 1m$. Hiện hồ chưa có nước nên anh Minh phải ra sông lấy nước. Mỗi lần ra sông anh gánh được 1 đôi nước đầy gồm hai thùng hình trụ bằng nhau có kích thước đáy $0,2m$, chiều cao $0,4m$.



- Tính lượng nước (m^3) anh Minh đổ vào hồ sau mỗi lần gánh (ghi kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân). Biết trong quá trình gánh nước về hao hụt khoảng 10% và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$.
- Hỏi anh Minh phải gánh ít nhất bao nhiêu lần để đầy hồ? Bỏ qua thể tích thành hồ.

Bài 7. (1,0 điểm)

Sau buổi sinh hoạt ngoại khóa, nhóm bạn của Thư rủ nhau đi ăn kem ở một quán gần trường. Do quán mới khai trương nên có khuyến mãi, bắt đầu từ ly thứ 5 giá mỗi ly kem giảm 1 500 đồng so với giá ban đầu. Nhóm của Thư mua 9 ly kem với số tiền là 154 500 đồng. Hỏi giá của một ly kem ban đầu?

Bài 8. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA > 2R$. Từ A kẻ 2 tiếp tuyến AD ; AE đến đường tròn (O) (D, E là 2 tiếp điểm). Lấy điểm M nằm trên cung nhỏ $\widehat{DE}$ sao cho $MD > ME$. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt AD ; AE lần lượt tại I ; J . Đường thẳng DE cắt OJ tại F .

- Chứng minh: OJ là đường trung trực của đoạn thẳng ME và $\widehat{MOF} = \widehat{OEF}$.
- Chứng minh: tứ giác $ODIM$ nội tiếp và 5 điểm I ; D ; O ; F ; M cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{IOM} = \widehat{IOA}$ và $\sin \widehat{IOA} = \frac{MF}{IO}$.

----- HẾT -----

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

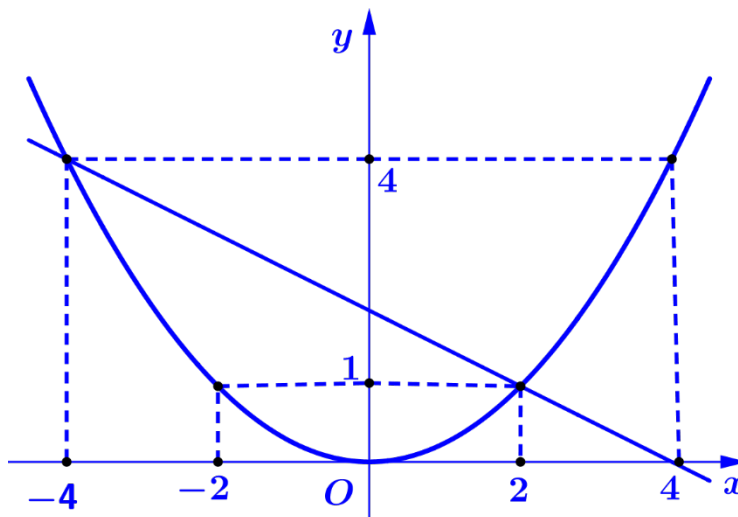
b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải:

a)

x	-4	-2	0	2	4
$(P): y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

x	0	4
$(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$	2	0



b) Tìm tọa độ giao điểm của $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và $(d): y = -\frac{1}{2}x + 2$ bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$ ta có giao điểm $A(2;1)$

Với $x = -4 \Rightarrow y = 4$ ta có giao điểm $B(-4; 4)$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(2; 1)$ và $B(-4; 4)$.

Bài 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $2x^2 - 5x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 .

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1)$.

Lời giải:

Ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= (x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) \\ &= x_1 x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 x_2 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + 5x_1 x_2 \\ &= 2(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Bài 3. (0,75 điểm)

Quy tắc sau đây cho ta biết CAN, CHI của năm X nào đó.

Để xác định CAN, ta tìm số dư r trong phép chia X cho 10 và tra vào bảng 1.

Để xác định CHI, ta tìm số dư s trong phép chia X cho 12 và tra vào bảng 2.

Ví dụ: năm 2020 có CAN là Canh, CHI là Tí.

Bảng 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CAN	Canh	Tân	Nhâm	Quý	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ

Bảng 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CHI	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tí	Sửu	Dần	Mẹo	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi

a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN, CHI của năm 2005?

b) Bạn Hằng nhớ rằng Nguyễn Huệ lên ngôi hoàng đế, hiệu là Quang Trung vào năm Mậu Thân nhưng không nhớ rõ đó là năm bao nhiêu mà chỉ nhớ là sự kiện trên xảy ra vào cuối thế kỉ 18. Em hãy giúp Hằng xác định chính xác năm đó là năm bao nhiêu?

Lời giải:

a) Ta có

$$2005 : 10 = 200 \text{ dư } 5 \Rightarrow \text{CAN} = \text{"Ất"}.$$

$$2005 : 12 = 167 \text{ dư } 1 \Rightarrow \text{CHI} = \text{"Dậu"}.$$

Vậy năm 2005 có CAN là "Ất", CHI là "Dậu".

b) Gọi x là năm Nguyễn Huệ lên ngôi hoàng đế.

Do x thuộc cuối thế kỉ 18 nên $1750 \leq x \leq 1799$.

Do CAN của x là Mậu nên $x : 10$ dư 8.

Suy ra hàng đơn vị của x là số 8.

Suy ra x là một trong các năm 1758, 1768, 1778, 1788, 1798.

Do CHI của x là "Thân" nên x chia hết cho 12.

Vậy chỉ có năm 1788 thỏa mãn.

Vậy Nguyễn Huệ lên ngôi hoàng đế năm 1788.

Bài 4. (0,75 điểm)

Cước điện thoại y (nghìn đồng) là số tiền mà người sử dụng điện thoại cần trả hàng tháng, nó phụ thuộc vào lượng thời gian gọi x (phút) của người đó trong tháng. Mỗi liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Hãy tìm a, b biết rằng nhà bạn Nam trong tháng 5 đã gọi 100 phút với số tiền là 40 nghìn đồng và trong tháng 6 gọi 40 phút với số tiền là 28 nghìn đồng.

Lời giải:

Theo đề ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 100a + b = 40 \\ 40a + b = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 20 \end{cases}.$$

Vậy $a = \frac{1}{5}, b = 20$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Theo quy định của cửa hàng xe máy, để hoàn thành chỉ tiêu trong một tháng, mỗi nhân viên phải bán được trung bình một chiếc xe máy trong một ngày. Nhân viên nào hoàn thành chỉ tiêu trong một tháng thì nhận lương cơ bản là 8000000 đồng. Nếu trong một tháng nhân viên nào vượt chỉ tiêu thì được thưởng thêm 8% tiền lời của số xe được bán vượt chỉ tiêu đó. Trong tháng 5 (có 31 ngày), anh Thành nhận được số tiền là 9800000 đồng (bao gồm cả lương cơ bản và tiền thưởng thêm tháng đó.). Hỏi anh Thành đã bán được bao nhiêu chiếc xe máy trong tháng 5, biết rằng số xe bán ra thì cửa hàng thu được tiền lời được 2500000 đồng.

Lời giải:

Gọi x là số xe mà anh Thành bán được trong tháng 5.

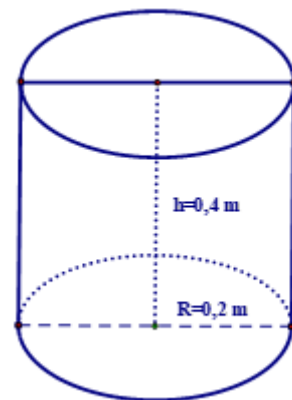
Theo đề ta có phương trình

$$8000000 + (x - 31) \times 8\% \times 2500000 = 9800000 \Leftrightarrow x = 40$$

Vậy anh Thành bán được 40 chiếc.

Bài 6. (1,0 điểm)

Anh Minh vừa mới xây một cái hồ trữ nước cạnh nhà có hình hộp chữ nhật kích thước $2m \times 2m \times 1m$. Hiện hồ chưa có nước nên anh Minh phải ra sông lấy nước. Mỗi lần ra sông anh gánh được 1 đôi nước đầy gồm hai thùng hình trụ bằng nhau có kích thước đáy $0,2m$, chiều cao $0,4m$.



- a) Tính lượng nước (m^3) anh Minh đổ vào hồ sau mỗi lần gánh (ghi kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân). Biết trong quá trình gánh nước về hao hụt khoảng 10% và công thức tính thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h$.

- b) Hỏi anh Minh phải gánh ít nhất bao nhiêu lần để đầy hồ? Bỏ qua thể tích thành hồ.

Lời giải:

- a) Thể tích hình trụ

$$V_{tru} = \pi R^2 h = \pi \cdot 0,2^2 \cdot 0,4 = 0,05(m^3)$$

Lượng nước anh Minh đổ vào hồ trong mỗi lần gánh là

$$V = 2V_{tru} \times 90\% = 0,09 (m^3)$$

- b) Thể tích cái hồ là: $V = 2.2.1 = 4$

$$\text{Số lần gánh của anh Minh để đầy hồ là: } \frac{4}{0,09} = 44,4.$$

Vậy anh Minh cần gánh ít nhất 45 lần.

Bài 7. (1,0 điểm)

Sau buổi sinh hoạt ngoại khóa, nhóm bạn của Thư rủ nhau đi ăn kem ở một quán gần trường. Do quán mới khai trương nên có khuyến mãi, bắt đầu từ ly thứ 5 giá mỗi ly kem giảm 1 500 đồng so với giá ban đầu. Nhóm của Thư mua 9 ly kem với số tiền là 154 500 đồng. Hỏi giá của một ly kem ban đầu?

Lời giải:

Gọi x (đồng) là giá ly kem ban đầu.

Theo giả thiết ta có phương trình: $4x + 5(x - 1\,500) = 154\,500$

$$\Rightarrow 9x = 162\,000 \rightarrow x = 18\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá tiền của một ly kem là 18 000 đồng.

Bài 8. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , bán kính R và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA > 2R$. Từ A kẻ 2 tiếp tuyến AD ; AE đến đường tròn (O) (D, E là 2 tiếp điểm). Lấy điểm M nằm trên cung nhỏ $\widehat{DE}$ sao cho $MD > ME$. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt AD ; AE lần lượt tại I ; J . Đường thẳng DE cắt OJ tại F .

- a) Chứng minh: OJ là đường trung trực của đoạn thẳng ME và $\widehat{MOF} = \widehat{OEF}$.
b) Chứng minh: tứ giác $ODIM$ nội tiếp và 5 điểm I ; D ; O ; F ; M cùng nằm trên một đường tròn.

- c) Chứng minh $\widehat{IOM} = \widehat{IOA}$ và $\sin \widehat{IOA} = \frac{MF}{IO}$.

Lời giải:

a)

CMR: OJ là đường trung trực của ME .

$\Rightarrow JM = JE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow OJ$ là đường trung trực của ME (1)

(1) $\Rightarrow \triangle OMJ = \triangle OEJ$ ($c - c - c$)

$\Rightarrow \widehat{MOF} = \widehat{EOF}$

$\Rightarrow \triangle OMF = \triangle OEF$ ($c - g - c$)

$\Rightarrow \widehat{OEF} = \widehat{OMF}$ (2) (2)

b)

Ta có $\widehat{OMI} = \widehat{ODI} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $ODIM$ nội tiếp (3)

Ta chứng minh $ODMF$ nội tiếp

Xét tam giác $\triangle OED$ có $\widehat{OED} = \widehat{ODE}$ (do $\triangle ODE$ cân tại O)

Theo ý a ta có $\widehat{OMF} = \widehat{OEF}$ nên ta có $\widehat{ODE} = \widehat{ODF} = \widehat{OMF}$

Suy ra $ODMF$ nội tiếp (do cùng chắn cung OF) (4).

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm O, D, I, M, F cùng nằm trên một đường tròn.

c)

Ta có tứ giác $IDOF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DIO} = \widehat{DFO}$ (cùng chắn cung DO)

$\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{EFO}$ (2 góc kề bù tương ứng) (5)

Ta lại có tứ giác $ADOE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DAO} = \widehat{DEO}$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \triangle AIO \sim \triangle EFO$ ($g - g$)

$\Rightarrow \widehat{IOA} = \widehat{EOF}$

Mà $\widehat{EOF} = \widehat{JOM}$

Nên $\widehat{IOA} = \widehat{JOM}$

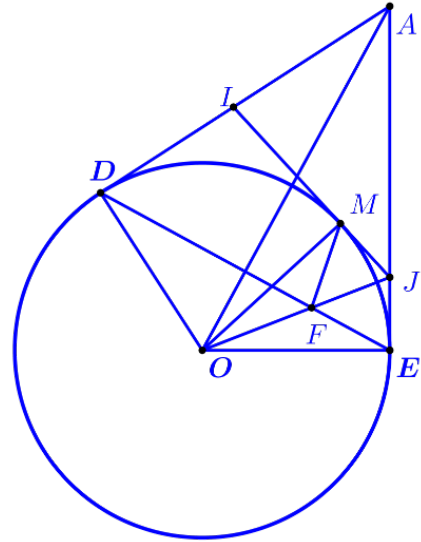
Chứng minh $\sin \widehat{IOA} = \frac{MF}{IO}$

Ta có $\sin \widehat{IOA} = \sin \widehat{JOM} = \frac{MJ}{OJ}$ (7)

Mặt khác $JMFO$ nội tiếp (do ý b) nên ta có $\widehat{JMF} = \widehat{JOI}$

Suy ra $\triangle JMF \sim \triangle JOI$ ($g - g$) $\Rightarrow \frac{MJ}{JO} = \frac{MF}{OI}$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\sin \widehat{IOA} = \frac{MF}{IO}$.



----- HẾT -----