

Câu I. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{y} = 4 \\ \sqrt{x-1} - \frac{1}{y} = -1 \end{cases}$$
.

Câu III. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx - m^2 - m - 2$ (với m là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) , xác định m để $x_1y_2 + x_2y_1 = 2m^3 + 6$.

Câu IV. (1,0 điểm) Trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiền điện. Sang tháng 5 năm 2023, do tăng cường thực hiện việc sử dụng điện an toàn, tiết kiệm và hiệu quả; nhà bác An giảm được 15% tiền điện và nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện; kết quả là cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023. Hỏi trong tháng 4 năm 2023, mỗi hộ gia đình dùng hết bao nhiêu đồng tiền điện?

Câu V. (3,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm S nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua S (không đi qua tâm O) cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm M và N với M nằm giữa S và N .

1. Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp.

2. Chứng minh $SB^2 = SM \cdot SN$.

3. Cho $SO = R\sqrt{5}$ và $MN = R\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm MN . Tính độ dài đoạn thẳng OE và diện tích tam giác SOM theo R .

4. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $(O; R)$ cắt SA, SB lần lượt tại P, Q . Gọi giao điểm của OQ, OP với AB lần lượt là I và H . Chứng minh ba đường thẳng OM, QH, PI đồng quy.

Câu VI. (0,5 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$.

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1..... Cán bộ coi thi số 2.....

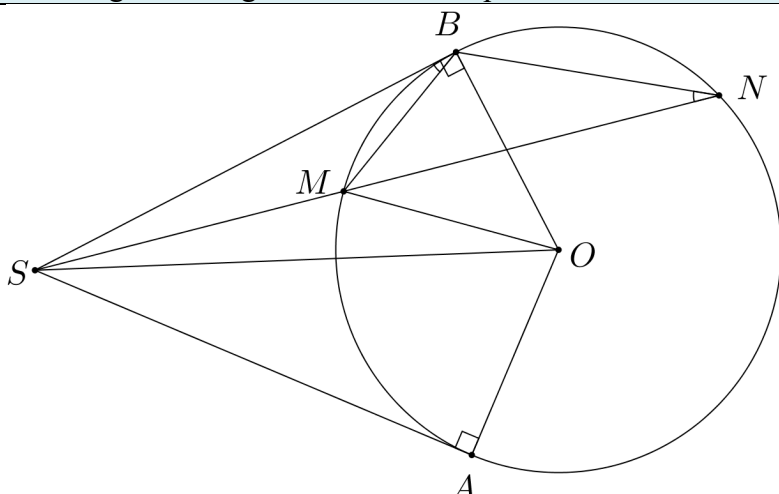
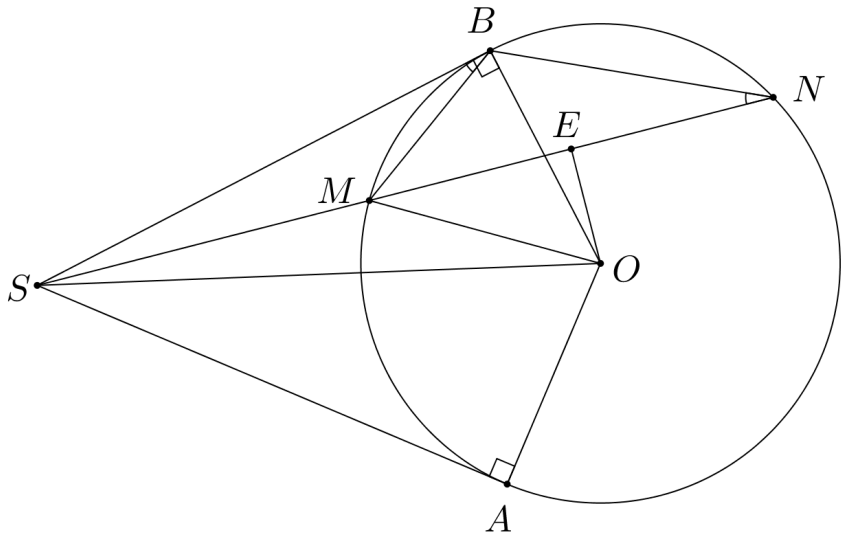
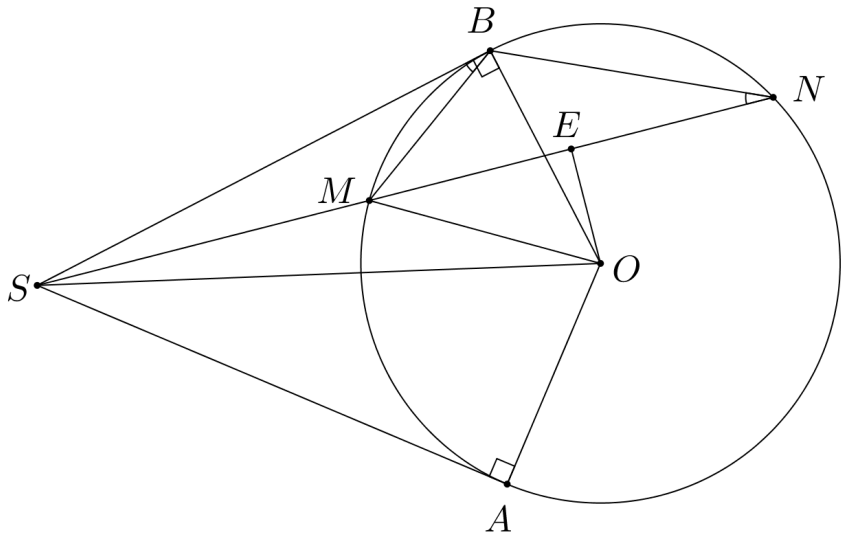
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

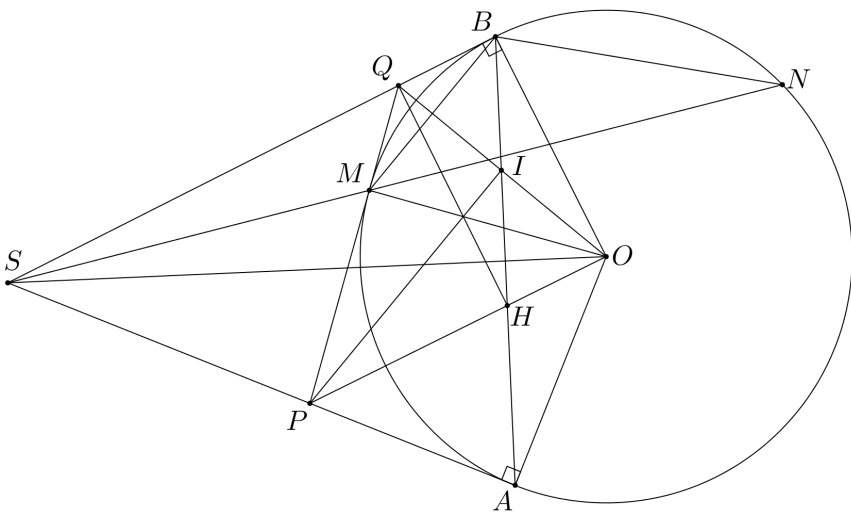
Lưu ý:

- Các cách giải đúng khác đáp án cho điểm tương ứng theo hướng dẫn chấm.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu I 1,5 điểm	Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).		
	1 1,0 điểm	1. Rút gọn biểu thức P .	
		$P = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$	0,5
		$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}-1)$	0,25
		$P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.	0,25
	2 0,5 điểm	2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.	
		$P = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Biểu thức P nhận giá trị nguyên $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước nguyên của 1	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=1 \\ \sqrt{x}+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=-2 \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow x=0.$ Vậy $x=0$ thỏa mãn.		0,25	
II 2,0 điểm	1 1,0 điểm	1. Giải phương trình: $x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$.	
		$\text{Do } \Delta' = (-2)^2 - 1.2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$	0,5
		Nên phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 3 - \sqrt{3}$.	0,5
	2 1,0 điểm	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{y} = 4 \\ \sqrt{x-1} - \frac{1}{y} = -1 \end{cases}$	
		Điều kiện xác định $x \geq 1; y \neq 0$	0,25
		Đặt $a = \sqrt{x-1} (a \geq 0); b = \frac{1}{y}$. Hệ trở thành $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - b = -1 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$	0,25
$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy hệ có một nghiệm $(x; y) = \left(2; \frac{1}{2} \right)$	0,25		

III (1,5 điểm)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx - m^2 - m - 2$ (với m là tham số).		
	1 0,5 điểm	1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3 .	
		$x = -3 \Rightarrow y = 9$	0,25
		Vậy $M(-3; 9)$.	0,25
	2 1,0 điểm	2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) , xác định m để $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2m^3 + 6$.	
		Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 2mx - m^2 - m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + m + 2 = 0$ (1) $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 + m + 2) = -m - 2$	0,25
		(d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ (*)	0,25
		Ta có $x_1 + x_2 = 2m, \quad x_1 x_2 = m^2 + m + 2$ $x_1 y_2 + x_2 y_1 = x_1 \cdot x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 2m(m^2 + m + 2)$	0,25
		$= 2m^3 + 2m^2 + 4m$ $2m^3 + 2m^2 + 4m = 2m^3 + 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$	0,25
		Đổi chiều (*) vậy $m = -3$.	
IV 1,0 điểm	Trong tháng 4 năm 2023, hai hộ gia đình bác An và bác Bình dùng hết tổng cộng 500 nghìn đồng tiền điện. Sang tháng 5 năm 2023, do tăng cường thực hiện việc sử dụng điện an toàn, tiết kiệm và hiệu quả; nhà bác An giảm được 15% tiền điện và nhà bác Bình giảm được 10% tiền điện; kết quả là cả hai hộ gia đình tiết kiệm được tổng cộng 65 nghìn đồng tiền điện so với tháng 4 năm 2023. Hỏi trong tháng 4 năm 2023, mỗi hộ gia đình dùng hết bao nhiêu đồng tiền điện?		
	Gọi số tiền điện trong tháng 4 của nhà bác An là x (nghìn đồng), điều kiện $0 < x < 500$ Gọi số tiền điện trong tháng 4 của nhà bác Bình là y (nghìn đồng), điều kiện $0 < y < 500$		0,25
	Vì trong tháng 4 cả hai gia đình dùng hết 500 nghìn tiền điện nên ta có phương trình $x + y = 500$ (1)		0,25
	Vì sang tháng 5 nhà bác An giảm 15% và nhà bác Bình giảm 10% và cả hai nhà giảm được 65 nghìn đồng nên ta có phương trình $15\%x + 10\%y = 65 \Leftrightarrow 0,15x + 0,1y = 65$ (2)		0,25
	Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,15x + 0,1y = 65 \end{cases}$ Giải hệ ta được $\begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$. Vậy trong tháng 4 nhà bác An dùng hết 300 nghìn đồng tiền điện, nhà bác Bình dùng hết 200 nghìn đồng tiền điện.		0,25
V 3,5 điểm	Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm S nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua S (không đi qua tâm O) cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm M và N , với M nằm giữa S và N .		

	1 1,0 điểm	1. Chứng minh tứ giác $SAOB$ nội tiếp.		0,25
		$\widehat{SAO} = 90^\circ$ vì SA là tiếp tuyến của đường tròn		
		$\widehat{SBO} = 90^\circ$ vì SB là tiếp tuyến của đường tròn		0,25
		$\Rightarrow \widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 180^\circ$		0,25
		Vậy tứ giác $SAOB$ nội tiếp.		0,25
	2 0,75 điểm	2. Chứng minh $SB^2 = SM \cdot SN$.		0,25
		Xét hai $\triangle SBM$ và $\triangle SNB$: Có $\widehat{S}$ chung.		
		Có $\widehat{MBS} = \widehat{MNB}$ (cùng chắn $\widehat{MB}$) $\Rightarrow \triangle SBM$ đồng dạng $\triangle SNB$		0,25
		$\Rightarrow \frac{SB}{SN} = \frac{SM}{SB} \Leftrightarrow SB^2 = SM \cdot SN$		0,25
	3 1,0 điểm	3. Cho $SO = R\sqrt{5}$ và $MN = R\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm MN . Tính độ dài đoạn thẳng OE và diện tích tam giác SOM theo R .		0,25
		Ta có $OE \perp MN$		
		$MN = R\sqrt{2} \Rightarrow ME = \frac{R\sqrt{2}}{2},$		
		$OM = R \Rightarrow OE = \sqrt{OM^2 - ME^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$		
		$SO = R\sqrt{5}, SE = \sqrt{SO^2 - OE^2} = \sqrt{5R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$		0,25
		$SM = SE - ME = R\sqrt{2}.$		0,25
		Vậy $S_{SOM} = \frac{1}{2} OE \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} = \frac{R^2}{2}$		0,25

	4. Tiếp tuyến tại M của đường tròn $(O; R)$ cắt SA, SB lần lượt tại P, Q. Gọi giao điểm của OQ, OP với AB lần lượt là I và H. Chứng minh ba đường thẳng OM, QH, PI đồng quy.		
VI 0,5 điểm	4 0,75 điểm	Vì QM, QB là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{BOQ} = \widehat{QOM}$ PM, PA là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AOP} = \widehat{POM}$ $\widehat{QOM} + \widehat{POM} = \widehat{BOQ} + \widehat{AOP} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{POQ} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$	0,25
		Mà $\widehat{QBH} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (cùng chắn $\widehat{AB}$) nên $\widehat{QBH} = \widehat{POQ}$ Suy ra tứ giác $OBQH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QHO} = \widehat{QBO} = 90^\circ \Rightarrow QH \perp OP$ (1) Chứng minh tương tự ta có tứ giác $OAPM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PIO} = \widehat{PAO} = 90^\circ \Rightarrow PI \perp OQ$ (2)	0,25
		Ta có $OM \perp PQ$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đường thẳng OM, QH, PI là ba đường cao của tam giác OPQ nên chúng đồng quy.	0,25
VI 0,5 điểm		Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}}$.	
		Có $a + b + c = 1 \Rightarrow c = c(a + b + c) \Rightarrow c + ab = c(a + b + c) + ab = (c + a)(c + b)$ Áp dụng BĐT AM - GM với hai số dương x, y ta có: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c+ab}} = \frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}}{2} \Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$ (1)	0,25
		Tương tự: $\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right)$ (2) $\frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right)$ (3) Cộng (1), (2), (3) theo vế ta có: $P = \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ca+ab}{2(b+c)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$ Từ đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,25