

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài 1: (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = (\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$

2. $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Bài 2: (2,0 điểm)

1) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

2) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô sẽ gấp 2 lần vận tốc của xe máy.

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho đường thẳng $(d): y = 2mx + m^2 + 1$ với m là tham số và parabol $(P): y = x^2$.

1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m thỏa mãn
$$\frac{3x_1x_2}{x_1 + x_2} - x_1 - x_2 \leq 0.$$

Bài 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C, D là hai điểm thuộc (O) và nằm khác phía đối với đường thẳng AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm hai dây AC và AD .

1) Tính tổng $AC^2 + BC^2$ biết bán kính đường tròn (O) bằng 3cm.

2) Chứng minh bốn điểm A, O, E, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K khác E . Chứng minh đường thẳng DK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 5: (0,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

----- Hết -----

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Bài 1: (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$1. A = (\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$$

$$2. B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-3} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 9.$$

$$\begin{aligned} 1) A &= (\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} = (\sqrt{9 \cdot 3} + 3\sqrt{4 \cdot 3} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} \\ &= (3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} = 7\sqrt{3} : \sqrt{3} = 7. \end{aligned}$$

$$2) B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5(\sqrt{x}+3)+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = \frac{6(\sqrt{x}+3)}{2(\sqrt{x}+3)} = 3.$$

Bài 2: (2,0 điểm)

1) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

2) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô sẽ gấp 2 lần vận tốc của xe máy.

$$1) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + 2(2x - 4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 5x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

2) Gọi x, y (km/h) lần lượt là vận tốc của ô tô, xe máy ($x > 0; y > 5$).

Khi đó: Quãng đường ô tô đi được trong 2 giờ là $2x$ (km).

Quãng đường xe máy đi được trong 2 giờ là $2y$ (km).

Vì sau 2 giờ hai xe gặp nhau, nên ta có phương trình: $2x + 2y = 200 \Leftrightarrow x + y = 100$.

Vận tốc của ô tô sau khi tăng là $x + 10$ (km/h).

Vận tốc của xe máy sau khi giảm là $y - 5$ (km/h).

Vì vận tốc của ô tô gấp 2 lần vận tốc của xe máy, nên có phương trình:

$$x + 10 = 2(y - 5) \Leftrightarrow x - 2y = -20.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x + y = 100 \\ x - 2y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 120 \\ x = 100 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 \\ x = 60 \end{cases} \text{ (TMĐK).}$$

Vậy vận tốc ô tô là 60 km/h; xe máy là 40 km/h.

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho đường thẳng $(d): y = 2mx + m^2 + 1$ với m là tham số và parabol $(P): y = x^2$.

1) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

2) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm m thỏa mãn

$$\frac{3x_1x_2}{x_1 + x_2} - x_1 - x_2 \leq 0.$$

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = 2mx + m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0 \quad (*).$$

Ta có $ac = -m^2 - 1 < 0; \forall m$. Nên phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung.

2) Vì phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m (theo câu 1).

Nên theo Viét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{3x_1 x_2}{x_1 + x_2} - x_1 - x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(-m^2 - 1)}{2m} - 2m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-7m^2 - 3}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

(do $-7m^2 - 3 \leq 0; \forall m$).

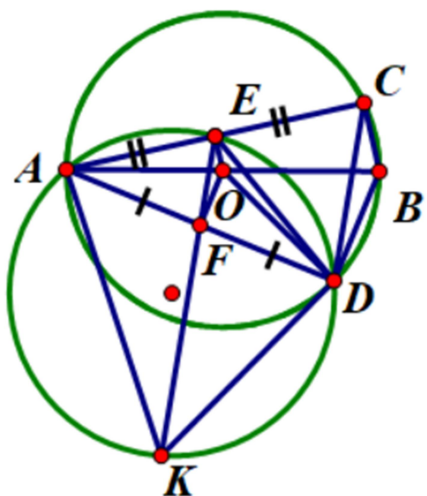
Bài 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C, D là hai điểm thuộc (O) và nằm khác phía đối với đường thẳng AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm hai dây AC và AD .

1) Tính tổng $AC^2 + BC^2$ biết bán kính đường tròn (O) bằng $3cm$.

2) Chứng minh bốn điểm A, O, E, F cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K khác E . Chứng minh đường thẳng DK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .



1) Tính tổng $AC^2 + BC^2$ biết bán kính đường tròn (O) bằng $3cm$.

Xét $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))
 $\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2 = (2 \cdot 3)^2 = 36 (cm^2)$.

2) Chứng minh bốn điểm A, O, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $AE = CE = \frac{1}{2} AC$ (gt) $\Rightarrow OE \perp AC$. (quan hệ giữa đường kính và dây)

$$AF = DF = \frac{1}{2} AD$$
 (gt) $\Rightarrow OF \perp AD$. (quan hệ giữa đường kính và dây)

Xét tứ giác $AEOF$, ta có: $\widehat{AEO} = \widehat{AFO} = 90^\circ$ (do $OE \perp AC, OF \perp AD$).

Vậy tứ giác $AEOF$ là tứ giác nội tiếp

3) Chứng minh đường thẳng DK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

hay $BC \perp AC; BD \perp AD$, mà $OE \perp AC; OF \perp AD$ (cmt) $\Rightarrow OE \parallel BC; OF \parallel BD$.

Xét $\triangle ABC$, ta có: $OE \parallel BC$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AO}{AB}$ (định lý Ta lét)

Xét $\triangle ABD$, ta có: $OF \parallel BD$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AO}{AB}$ (định lý Ta lét)

Do đó $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$. Xét $\triangle ACD$, ta có: $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}$ (cmt) $\Rightarrow CD \parallel EF$ (định lý Ta lét đảo)

$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{ACD}$ (đồng vị).

Lại có: $\widehat{AEK} = \widehat{ADK}$. (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AK}$ của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$)

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AD}$ của đường tròn (O)).

$\widehat{ABD} = \widehat{ODB}$ ($\triangle OBD: OB = OD$, nên $\triangle OBD$ cân tại O).

$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{ODB} \Rightarrow \widehat{ADK} + \widehat{ADO} = \widehat{ODB} + \widehat{ADO} \Rightarrow \widehat{KDO} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, hay $DK \perp OD$.

Vậy đường thẳng DK là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 5: (0,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Ta có: $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$.

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow 3a^3 \geq (a^3 - b^3) + (a^3 + a^2b + ab^2)$.

$\Leftrightarrow 3a^3 \geq (a - b)(a^2 + ab + b^2) + a(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}$ (do $a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0; a^2 + ab + b^2 > 0; \forall a, b$).

Tương tự: $\frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{2b - c}{3}; \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2c - a}{3}$

Do đó $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2a - b}{3} + \frac{2b - c}{3} + \frac{2c - a}{3} = \frac{a + b + c}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.