

Bài I. (1,5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$.

2) Cho biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{x}{x - 4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 1$.

Bài II. (2,5 điểm)

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Bài III. (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

b) Bằng phép tính, tìm tất cả những điểm thuộc Parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ

Bài IV. (1,5 điểm)

Quãng đường AB dài 150 km. Một xe tải khởi hành đi từ A đến B, cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. Tính vận tốc xe tải.

Bài V. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$ và $AC = 4\text{cm}$. Tính độ dài cạnh BC và giá trị của $\tan C$.

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn (O) sao cho $CA < CB$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng OB, đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt dây CB và tia AC lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn

b) Gọi I là trung điểm DE. Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

c) Chứng minh rằng $AC \cdot AE = 3R^2$.

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài I.

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$

Ta có:

$$A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$

$$A = |2 + \sqrt{3}| - \sqrt{3}$$

$$A = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} \text{ (do } 2 + \sqrt{3} > 0)$$

$$A = 2.$$

2) Cho biểu thức: $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{x}{x - 4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức B

ĐKXĐ: $x \geq 0, x \neq 4$.

Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{x}{x - 4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4} + \frac{x}{x - 4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 2 + x}{x - 4}$$

$$B = \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - 4}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
B < 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \text{ (do } 2 > 0 \text{)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 2^2 \Leftrightarrow x < 4
\end{aligned}$$

Kết hợp với ĐKXD ta có $0 \leq x < 4$ thì $B < 1$.

Bài II.

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ta có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1; 2\}$.

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad (1)$

Đặt $x^2 = t \ (t \geq 0)$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 8t - 9 = 0 \quad (2)$.

Ta có $a - b + c = 1 - (-8) - 9 = 0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt: $\begin{cases} t_1 = -1(\text{ktm}) \\ t_2 = -\frac{c}{a} = 9(\text{tm}) \end{cases}$

Với $t = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; 3\}$.

2) Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là 2 và đi qua điểm $M(-1; 3)$

Giả sử phương trình đường thẳng (d) là $y = ax + b$

Vì (d) có hệ số góc là 2 nên ta có $a = 2$.

Vì (d) đi qua điểm $M(-1;3)$ nên ta có: $3 = a \cdot (-1) + b \Leftrightarrow -a + b = 3(*)$.

Thay $a = 2$ vào (*) ta có $-2 + b = 3 \Leftrightarrow b = 5$.

Vậy đường thẳng (d) cần tìm có phương trình là $y = 2x + 5$.

Bài III.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị parabol (P).

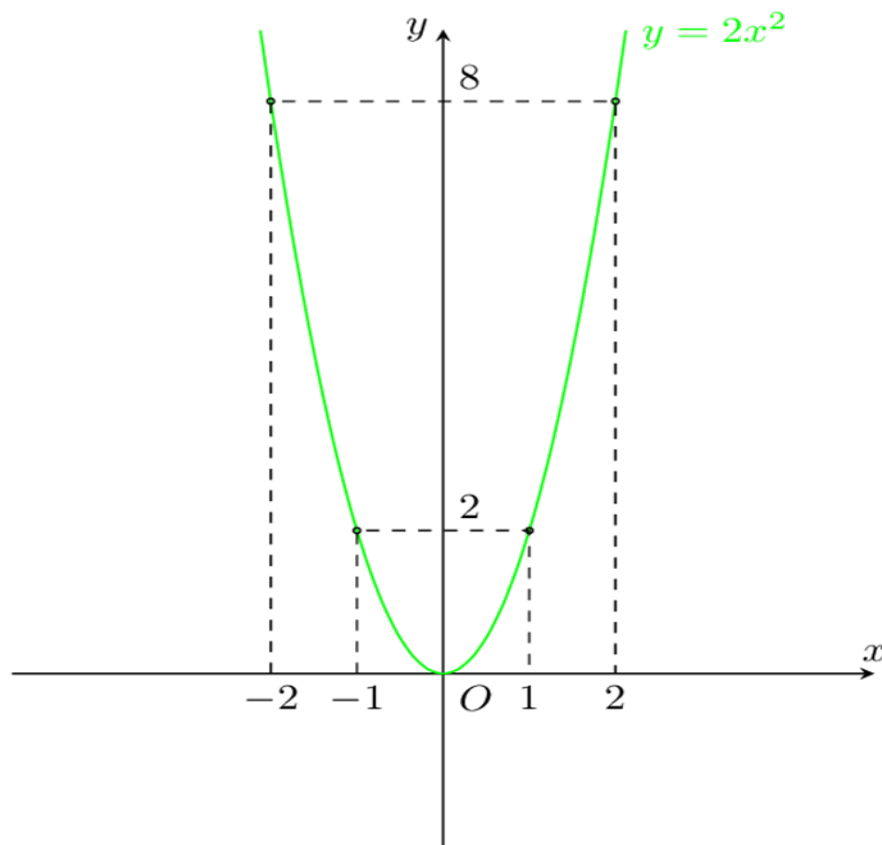
Parabol (P): $y = 2x^2$ có bề lõm hướng lên và nhận Oy làm trục đối xứng

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

$\Rightarrow$ Parabol (P): $y = 2x^2$ đi qua các điểm $(-2;8), (-1;2), (0;0), (1;2), (2;8)$.

Đồ thị Parabol (P): $y = 2x^2$



b) Bằng phép tính, tìm tất cả những điểm thuộc Parabol (P) (khác gốc tọa độ O) có tung độ gấp hai lần hoành độ

Goi điểm có tung độ gấp hai lần hoành độ là $A(m; 2m)(m \neq 0)$.

Vì $A \in (P)$ nên ta có: $2m = 2.m^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m \neq 0$).

Vậy điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A(1; 2)$

Bài IV:

Quãng đường AB dài 150 km. **Một xe tải** khởi hành đi từ A đến B , cùng lúc đó một ô tô cũng đi trên quãng đường đó từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe tải 5 km/h, nên ô tô đến B sớm hơn xe tải 20 phút. **Tính vận tốc xe tải.**

Goi vận tốc xe tải là x (km/h) ($x > 0$)

$\Rightarrow$ Thời gian xe tải đi hết quãng đường AB là $\frac{150}{x}$ (h)

Vận tốc của ô tô là $x + 5$ (km/h)

$\Rightarrow$ Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là $\frac{150}{x + 5}$ (h)

Do thời gian xe ô tô đến B sớm hơn so với xe tải là 20 phút $= \frac{1}{3}$ h nên ta có phương trình:

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{x + 5} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 150.3 \cdot (x + 5) - 150.3x = x(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow 450x + 2250 - 450x = x^2 + 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 2250 = 0$$

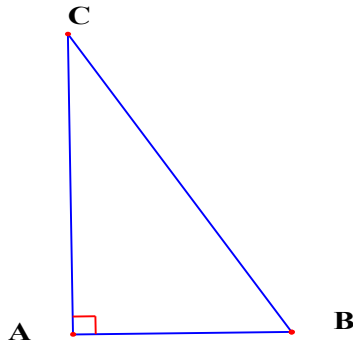
Ta có: $\Delta = 5^2 - 4.1.(-2250) = 9025 = 95^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-5 + 95}{2} = 45(\text{tm}) \\ x = \frac{-5 - 95}{2} = -50(\text{ktm}) \end{array} \right.$$

Vậy vận tốc xe tải là 45 km / h.

Bài V.

1) Cho tam giác ABC **vuông tại** A **có** $AB = 3\text{cm}$ **và** $AC = 4\text{cm}$. **Tính độ dài cạnh** BC **và giá trị của** $\tan C$.



Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABC vuông tại A ta có:

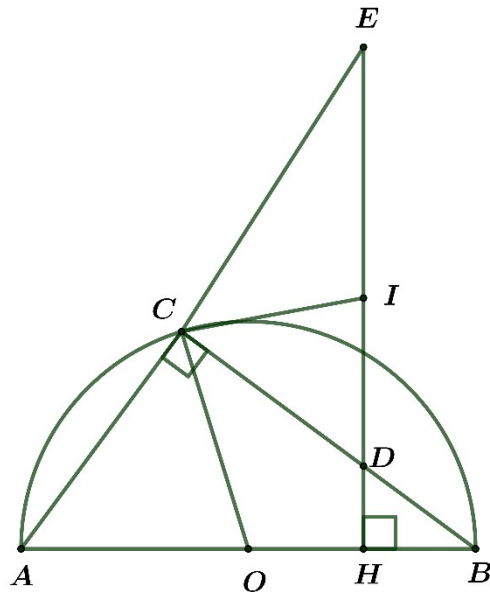
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5\text{cm}$$

$$\Rightarrow \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$

Vậy $BC = 5\text{cm}$ và $\tan C = \frac{3}{4}$.

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn (O) sao cho $CA < CB$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng OB, đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt dây CB và tia AC lần lượt tại D và E.



a) Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $HD \perp AB$ tại H(gt) nên $\widehat{DHA} = 90^\circ$

Mà C thuộc nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{DHA} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow ACHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD (dnhb).

Vậy A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn. (đpcm)

b) Gọi I là trung điểm DE . Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

Ta có $\widehat{ECD} = 90^\circ$ (Bù góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$) nên $\triangle ECD$ là tam giác vuông tại C .

DE là cạnh huyền của tam giác vuông ECD và I là trung điểm của DE nên $IC = ID = IE = \frac{1}{2}DE$
(trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền).

$\Rightarrow \triangle ICD$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \widehat{HDB}$ (đối đỉnh)

Mặt khác, $\triangle OBC$ cân tại O ($OB = OC$) $\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{OBD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ICO} = \widehat{ICD} + \widehat{DCO} = \widehat{HDB} + \widehat{OBD}$

Mà $\widehat{OBD} + \widehat{HDB} = 90^\circ$ (do tam giác HBD vuông tại H) $\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ$ hay $IC \perp OC$.

Vậy IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

c) Chứng minh rằng $AC \cdot AE = 3R^2$.

Xét tam giác $\triangle AHE$ và $\triangle ACB$ ta có:

$\widehat{EAB}$ chung;

$\widehat{ACB} = \widehat{AHE} = 90^\circ$;

$\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AC \cdot AE = AB \cdot AH = 2R \cdot AH$ (do $AB = 2R$)

Mặt khác, ta có H là trung điểm của OB (gt) nên

$HO = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R \Rightarrow AH = AO + OH = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$.

Vậy $AC \cdot AE = 2R \cdot \frac{3}{2}R = 3R^2$ (đpcm).