

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Tính $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x+4}{4-x} \right) : \frac{x}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 4$.

Rút gọn B và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B < -\sqrt{x}$.

Bài 2. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = kx - 2k + 4$

a) Vẽ đồ thị (P). Chứng minh rằng (d) luôn đi qua điểm $C(2; 4)$.

b) Gọi H là hình chiếu của điểm $B(-4; 4)$ trên (d). Chứng minh rằng khi k thay đổi ($k \neq 0$) thì diện tích tam giác HBC không vượt quá 9 cm (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

Bài 3. (1,5 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 4(m-1)x - 12 = 0$ (*), với m là tham số

a) Giải phương trình (*) khi $m = 2$

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $4|x_1 - 2|\sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2$.

Bài 4. (1,5 điểm)

a) Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 2021 và hiệu của số lớn và số bé bằng 15.

b) Một địa phương lên kế hoạch xét nghiệm SARS-CoV-2 cho 12000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 1000 người. Vì thế, địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ. Hỏi theo kế hoạch, địa phương này phải xét nghiệm trong thời gian bao nhiêu giờ?

Bài 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao BD, CE ($D \in AC, E \in AB$) cắt nhau tại H.

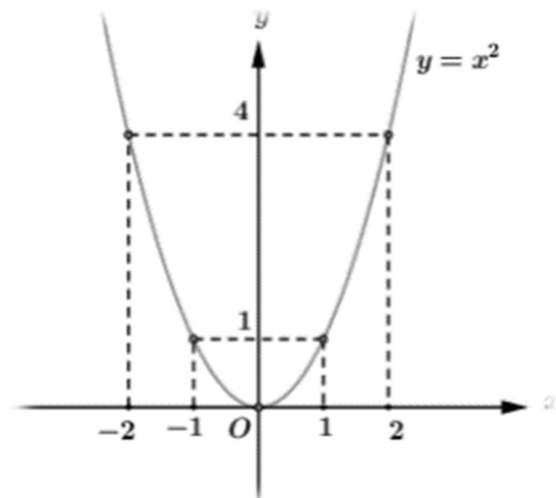
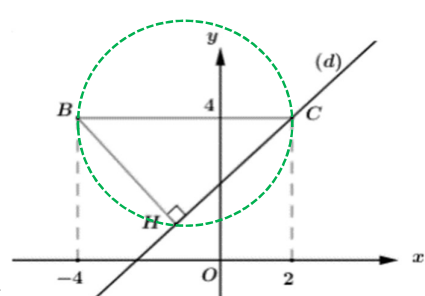
a) Chứng minh rằng tứ giác BEDC nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt AM tại điểm G (G khác A). Chứng minh rằng $AE \cdot AB = AG \cdot AM$.

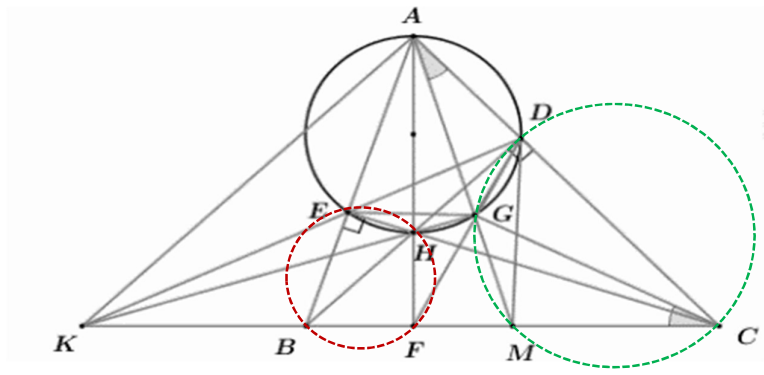
c) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $\widehat{MAC} = \widehat{GCM}$ và hai đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBE, MCD song song với đường thẳng KG.

HƯỚNG DẪN TÍNH ĐIỂM

Bài	Phần	Nội dung	Điểm												
1	a)	$A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{2^2} + \sqrt{3 \cdot 12} = 2 + \sqrt{6^2} = 2 + 6 = 8$	0,5												
	b)	$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x + 4}{4 - x} \right) : \frac{x}{x - 2\sqrt{x}}$ $= \left(\frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x + 4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$ $= \frac{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) + x + 4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ $= \frac{2\sqrt{x} - x + x + 4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ $= -\frac{2\sqrt{x} + 4}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= -\frac{2(\sqrt{x} + 2)}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ $= -\frac{2}{\sqrt{x}}$	0,5												
		$B < -\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{x}} < -\sqrt{x} \Rightarrow -2 < -x \Leftrightarrow 0 < x < 2.$	0,25												
		Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1.$	0,25												
2	a)	+) Vẽ đồ thị (P) : Parabol (P): $y = x^2$ có bề lõm hướng lên và nhận Oy làm trục đối xứng. Hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$ Ta có bảng giá trị sau: <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$y = x^2$</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr></table> $\Rightarrow$ Parabol (P) : $y = x^2$ đi qua các điểm $(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4).$ Đồ thị Parabol (P) : $y = x^2$:	x	-2	-1	0	1	2	$y = x^2$	4	1	0	1	4	0,75
x	-2	-1	0	1	2										
$y = x^2$	4	1	0	1	4										

		 +) Chứng minh rằng (d) luôn đi qua điểm $C(2;4)$. Thay $x = 2; y = 4$ vào phương trình đường thẳng (d): $y = kx - 2k + 4$, ta được: $4 = 2k - 2k + 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ (luôn đúng với mọi k) Vậy (d) luôn đi qua điểm $C(2;4)$ với mọi m.	
	b)	 Áp dụng định lý Pytago ta có: $HB^2 + HC^2 = BC^2 = 6^2 = 36$. $\Rightarrow S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot HC \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{BH^2 + HC^2}{2} = \frac{BC^2}{4} = \frac{ x_c - x_B ^2}{4} = \frac{6^2}{4} = 9$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $HB = HC = 3\sqrt{2}$.	0,75
3	a)	Thay $m = 2$ vào phương trình (*), ta có: $x^2 + 4(2-1)x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ Ta có: $\Delta' = 2^2 + 12 = 16 = 4^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ x = -2 - 4 = -6 \end{cases}$ Vậy với $m = 2$ thì tập nghiệm của phương trình (*) là $S = \{2; 6\}$.	0,75
	b)	Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 12 > 0$ (luôn đúng với mọi m). Vì x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên: $x_2^2 + 4(m-1)x_2 - 12 = 0$ $\Leftrightarrow x_2^2 + 4mx_2 - 4x_2 - 12 = 0$ $\Leftrightarrow x_2^2 + 4(mx_2 - 4) - 4x_2 + 4 = 0$ $\Leftrightarrow 4(4 - mx_2) = x_2^3 - 4x_2 + 4 = (x_2 - 2)^2$	0,75

		$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-mx_2} = \sqrt{(x_2-2)^2} = x_2-2 $ Khi đó ta có: $4 x_1-2 \sqrt{4-mx_2} = (x_1+x_2-x_1x_2-8)^2$ $\Leftrightarrow 2 (x_1-2)(x_2-2) = [4(1-m)+12-8]^2$ $\Leftrightarrow 2 x_1x_2-2(x_1+x_2)+4 = (8-4m)^2$ $\Leftrightarrow 2 -12-2.4(1-m)+4 = -64-64m+16m^2$ $\Leftrightarrow -16+8m = -8(m^2-4m+4)$ $\Leftrightarrow m-2 = (m-2)^2$ Suy ra $(m-2)^2 = (m-2)^4$ $\Leftrightarrow (m-2)^4 - (m-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (m-2)^2 \cdot [(m-2)^2 - 1] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m-2-1 \\ m-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m-3 \\ m-1 \end{cases}$ Vậy $m \in \{1; 2; 3\}$ là các giá trị thỏa mãn bài toán.	
4	a)	Gọi số lớn là $x(x > 15, x \in \mathbb{N})$, số bé là $y(y \in \mathbb{N})$. Ta có tổng hai số bằng 2021 nên ta có phương trình $x + y = 2021$ (1) Hiệu của số lớn và số bé bằng 15 nên ta có phương trình $x - y = 15$ (2) Từ (1), (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2021 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2036 \\ y - x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1018 \\ y - 1003 \end{cases} (tm)$ Vậy số lớn là 1018, số bé là 1003.	0,75
	b)	Theo kế hoạch, gọi số người xét nghiệm được trong một giờ là x (người) ($x \in \mathbb{N}^*, x < 12000$) Theo kế hoạch địa phương y xét nghiệm 12000 người hết $\frac{12000}{x}$ (giờ) Thực tế, số người xét nghiệm được trong một giờ là $x+1000$ (người) Thực tế, địa phương xét nghiệm 12000 người hết $\frac{12000}{x+1000}$ (giờ) Vì địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ nên ta có phương trình: $\frac{12000}{x} - \frac{12000}{x+1000} = 16$ $\Rightarrow x^2 + 1000x - 750000 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 1500x - 500x - 750000 = 0$ $\Leftrightarrow x(x+1500) - 500(x+1500) = 0$ $\Leftrightarrow (x+1500)(x-500) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1500=0 \\ x-500=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1500(ktm) \\ x=500(tm) \end{cases}$ Vậy theo kế hoạch, địa phương này cần 24 giờ để xét nghiệm xong.	0,75
5	a)		

		 Ta có: BD, CE là các đường cao của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ $\Rightarrow BEDC$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau).	0,5
	b)	Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$ $\Rightarrow AEHD$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (định nghĩa) Mà đường tròn đường kính AH cắt AM tại G. $\Rightarrow$ Năm điểm A, E, H, G, D cùng thuộc một đường tròn. $\Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{ADE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE) Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ (Tứ giác nội tiếp $BEDC$) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AGE}$. Xét $\triangle ABM$ và $\triangle AGE$ có: $\widehat{ABC} = \widehat{AGE}$ (cmt); $\widehat{BAM}$ chung. $\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle AGE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AG}{AB}$ (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow AE \cdot AB = AG \cdot AM$ (đpcm)	1
	c)	Ta có $\widehat{AGD} = \widehat{AED}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD) Mà $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp $BEDC$) $\Rightarrow \widehat{AGD} = \widehat{ACB} = \widehat{DCM}$ Lại có $\widehat{AGD} + \widehat{DGM} = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{DGM} + \widehat{DCM} = 180^\circ$. $\Rightarrow GDCM$ là tứ giác nội tiếp (dnhb) $\Rightarrow \widehat{MGC} = \widehat{MDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC). Lại có $DM = \frac{1}{2} BC = MC$ (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông) $\Rightarrow \triangle MCD$ cân tại M. $\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MCD}$ (2 góc ở đáy của tam giác cân). $\Rightarrow \widehat{MGC} = \widehat{MCD} = \widehat{MCA}$. Xét $\triangle GCM$ và $\triangle CAM$ có: $\widehat{AMC}$ chung; $\widehat{MAC} = \widehat{GCM}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle GCM \sim \triangle CAM$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{GCM}$ (2 góc tương ứng) (đpcm). Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AGE}$ (cmt) nên $EBMG$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện). $\Rightarrow$ Đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBE, MCD là đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $GDCM$ và $EBMG$. Giao của hai tứ giác $GDCM$ và $EBMG$ là GM.	0,5

	$\Rightarrow$ Đường nối tâm vuông góc với $GM(*)$ Gọi $\{F\} = AH \cap BC \Rightarrow AF \perp BC \Rightarrow \widehat{AFB} = 90^\circ$ Mà $\widehat{BDA} = 90^\circ \Rightarrow ADFB$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau). $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DFM}$ (1) (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp). Mà $\widehat{EDH} = \widehat{EAH}$ (2) (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH). $\widehat{HDM} = \widehat{HBM} = \widehat{DBM}$ (DM là trung tuyến của $\triangle BDC$ vuông tại D nên $DM = \frac{1}{2}BC = BM$). $\widehat{DBM} = \widehat{HAD}$ (Cùng phụ $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \widehat{HDM} = \widehat{HAD}$ Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{EDM} = \widehat{EDH} + \widehat{HDM} = \widehat{EAH} + \widehat{HAD} = \widehat{BAC} = \widehat{DFM} = \widehat{KDM}$ Xét $\triangle FDM$ và $\triangle DKM$ có: $\widehat{KMD}$ chung; $\widehat{DFM} = \widehat{KDM}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle FDM \sim \triangle DKM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MD}{KM} = \frac{FM}{MD} \Rightarrow MD^2 = FM \cdot KM$ Có: $\triangle GCM \sim \triangle CAM$ (cmt) $\Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{GM}{MC} \Rightarrow MC^2 = MG \cdot MA$ Mà $MD = MC$ (cmt) $\Rightarrow FM \cdot KM = MG \cdot MA \Rightarrow \frac{FM}{GM} = \frac{MA}{MK}$ $\Rightarrow \triangle FGM \sim \triangle AKM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FGM} = \widehat{AKM}$ (2 góc tương ứng) $\Rightarrow AGFK$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện). $\Rightarrow \widehat{AFK} = \widehat{AGK} = 90^\circ$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AK) $\Rightarrow KG \perp AG$ hay $KG \perp GM$ (**) Từ (*) và (**) suy ra đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBE, MCD song song với KG (đpcm).	0,5
--	---	-----