

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)(x+1) = 4 \\ (y^2 + xy + x + y + 5)(x^3 + y^3 + 12y + 13) = 243 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $(x-12)^7 + (2x-12)^7 + (24-3x)^7 = 0$.

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho cả ba số $4a^2 + 5b, 4b^2 + 5c, 4c^2 + 5a$ đều là bình phương của một số nguyên dương.

b) Từ một bộ bốn số thực (a, b, c, d) ta xây dựng bộ số mới $(a+b, b+c, c+d, d+a)$ và liên tiếp xây dựng các bộ số mới theo quy tắc trên. Chứng minh rằng nếu ở hai thời điểm khác nhau ta thu được cùng một bộ số (có thể khác thứ tự) thì bộ số ban đầu phải có dạng $(a, -a, a, -a)$.

Câu 3.

Cho tam giác ABC cân tại C có $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $\widehat{AEB} > 90^\circ$. Gọi P là giao điểm của BE với trung trực BC . Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB . Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP . Gọi giao điểm của EQ và PK là F .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi giao điểm của KQ và PE là L . Chứng minh rằng LA vuông góc với LE .

c) Gọi giao điểm của FL và AB là S . Gọi giao điểm của KE và AL là T . Lấy R là điểm đối xứng của A qua L . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPR tiếp xúc nhau.

Câu 4.

Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)^2 + 1 \geq \frac{4}{abc} + 3\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right).$$

----- HẾT -----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Với $(x+y)(x+1)=4$, ta có:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + 12y + 13 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 12(y+1) + 1 \\&= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3(x+1)(x+y)(y+1) + 1 \\&= (x+y)^3 - 3(x+y)[xy - (x+1)(y+1)] + 1 \\&= (x+y)^3 + 3(x+y)(x+y+1) + 1 \\&= (x+y+1)^3\end{aligned}$$

Ngoài ra:

$$\begin{aligned}y^2 + xy + x + y + 5 &= (y+1)(x+y) + (x+1)(x+y) + 1 \\&= (x+y)(x+y+2) + 1 = (x+y+1)^2.\end{aligned}$$

Do đó phương trình thứ hai của hệ tương đương $(x+y)^5 = 243 \Leftrightarrow x+y=2$.

Từ đó ta tìm được $x=y=1$.

Vậy hệ cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

b) Đặt $a = x-12$ và $b = 2x-12$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}a^7 + b^7 - (a+b)^7 &= 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6) - (a+b)^7 \\&\Leftrightarrow (a+b)[a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6 - (a+b)^6] = 0 \\&\Leftrightarrow (a+b)(-7a^5b - 14a^4b^2 - 21a^3b^3 - 14a^2b^4 - 7ab^5) = 0 \\&\Leftrightarrow ab(a+b)[(a^2+ab)^2 + a^2b^2 + (ab+b^2)^2] = 0\end{aligned}$$

Nhận thấy a, b không đồng thời bằng 0 nên phương trình tương đương: $ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}$.

Với $a=0$, ta có $x=12$.

Với $b=0$, ta có $x=6$.

Với $a+b=0$, ta có $x=8$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $S = \{6; 8; 12\}$.

Câu 2.

a) Không mất tính tổng quát, giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c .

Khi đó, ta có $4a^2 + 5b > 4a^2 = (2a)^2$ và $4a^2 + 5b \leq 4a^2 + 5a < 4a^2 + 8a + 4 = (2a + 2)^2$. Mà $4a^2 + 5b$ là số chính phương nên $4a^2 + 5b = (2a + 1)^2$, tức $5b = 4a + 1$.

Từ đây, ta suy ra b chia 4 dư 1. Do đó $b = 4k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Một cách tương ứng, ta có $a = 5k + 1$. Xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1: $b \geq c$. Chứng minh tương tự như trên, từ giả thiết $4b^2 + 5c$ là số chính phương, ta suy ra $5c = 4b + 1 = 16k + 5$. Do đó k chia hết cho 5, tức $k = 5n$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta có $c = 16n + 1, b = 20n + 1$ và $a = 25n + 1$.

Với kết quả trên, ta có

$$4c^2 + 5a = 4(16n + 1)^2 + 125n + 5 \geq 4(16n + 1) + 4(16n + 1) + 1 = (32n + 3)^2. \quad (1)$$

Và

$$4c^2 + 5a = 4(16n + 1)^2 = 125n + 5 = (32n + 4)^2 - (3n - 7) < (32n + 4)^2.$$

Mà $4c^2 + 5a$ là số chính phương nên $4c^2 + 5a = (32n + 3)^2$. Suy ra, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (1) phải xảy ra, tức $n = 0$. Từ đó $a = b = c = 1$.

- Trường hợp 2: $c > b$. Trong trường hợp này, ta có

$$4b^2 + 5c \geq 4b^2 + 5(b + 1) > (2b + 1)^2$$

Mà $4b^2 + 5c$ là số chính phương nên $4b^2 + 5c \geq (2b + 2)^2$. Do đó

$$5c \geq 8b + 4 = 32k + 12 > 25k + 5.$$

Suy ra $c > 5k + 1 = a$. mâu thuẫn. Vậy trường hợp này không thể xảy ra.

Tóm lại, có duy nhất một bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu là $(1; 1; 1)$.

b) Gọi (a_n, b_n, c_n, d_n) là bộ bốn số thực thu được sau lượt thứ n . Khi đó, ta có

$$(a_0, b_0, c_0, d_0) = (a, b, c, d)$$

Và

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 2(a_n + b_n + c_n + d_n). \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 2^n(a_0 + b_0 + c_0 + d_0) = 2^n(a + b + c + d).$$

Giả sử tồn tại hai số nguyên dương $m < k$ sao cho hai bộ số (a_m, b_m, c_m, d_m) và (a_k, b_k, c_k, d_k) là một (có thể khác thứ tự). Khi đó, ta có $a_m + b_m + c_m + d_m = a_k + b_k + c_k + d_k$ tức $2^m(a + b + c + d) = 2^k(a + b + c + d)$.

Vì $m < k$ nên $a + b + c + d = 0$. Bây giờ, ta có chú ý rằng

$$\begin{aligned} & a_{n+2}^2 + b_{n+2}^2 + c_{n+2}^2 + d_{n+2}^2 \\ &= (a_{n+1} + b_{n+1})^2 + (b_{n+1} + c_{n+1})^2 + (c_{n+1} + d_{n+1})^2 + (d_{n+1} + a_{n+1})^2 \\ &= 2(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2) + 2(a_{n+1} + c_{n+1})(b_{n+1} + d_{n+1}) \\ &= 2(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2) + 2(a_n + b_n + c_n + d_n)(b_{n+1} + d_{n+1}) \\ &= 2(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Suy ra $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 = 2^{n-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vì hai bộ số (a_m, b_m, c_m, d_m) và (a_k, b_k, c_k, d_k) là một (có thể khác thứ tự) nên

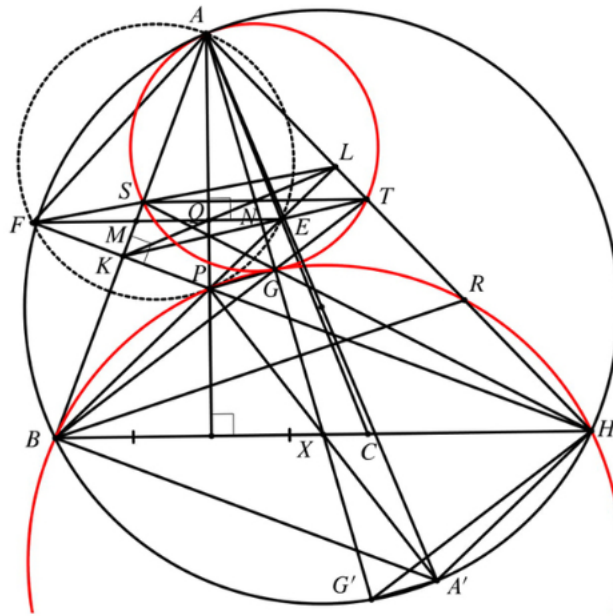
$$a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2 = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2.$$

Hay

$$2^{m-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) = 2^{k-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2).$$

Từ đây, ta có $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Suy ra $b = -a, c = -b, d = -c$, tức bộ số ban đầu phải có dạng $(a, -a, a, -a)$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 3.



a) Vì tam giác ABC cân tại A nên trung trực của BC đi qua A , hơn nữa AP là phân giác góc BAC .

Do đó $\angle PAE = \angle PAK$.

Tứ giác $AFKQ$ có $\angle AKF = \angle AQF = 90^\circ$ nên $AFKQ$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AF .

Suy ra $\angle KAQ = \angle KFQ$.

Do đó $\angle PAE = \angle PAK = \angle QAK = \angle QFK = \angle PFE$.

Do đó tứ giác $AEPF$ nội tiếp hay bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Từ các tứ giác nội tiếp $AFKQ$ và $AEPF$ đã chứng minh ở câu a), ta suy ra

$$\angle AQL = \angle AFK = \angle AFP = \angle AEL.$$

Suy ra tứ giác $AQEL$ nội tiếp. Mà $\angle AQE = 90^\circ$ nên $\angle ALE = 90^\circ$ hay $LA \perp LE$.

c) Ta có AL, KP, BC là ba đường cao của tam giác ABP nên chúng đồng quy tại trực tâm mà ta ký hiệu điểm đó là H . Trước hết, vì P là trực tâm tam giác ABH và A đối xứng R qua đường cao BL của tam giác ABR nên $\angle BRH = 180^\circ - \angle BRA = 180^\circ - \angle BAH = \angle BPH$, suy ra tứ giác $BPRH$ nội tiếp.

Ta có $\angle PBH = \angle PAL = \angle PKL$ nên $\angle LEF = \angle LKF$. Suy ra tứ giác $KFLE$ nội tiếp.

Do đó $\angle ALS = 90^\circ - \angle ELS = 90^\circ - \angle PKE = \angle SKT$. Từ đây, ta suy ra tứ giác $SLTK$ nội tiếp.

Vì tứ giác $BKLH$ nội tiếp đường tròn đường kính BH nên $\angle LTS = \angle LKS = \angle LHB$. Suy ra $ST \parallel BH$.

Đường thẳng EF cắt AB tại M , KL cắt ST tại N . Ta có AQ vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác AEM nên AEM cân tại A . Suy ra $QE = QM$. Kết hợp với $ST \parallel EM$ (cùng vuông với AQ) nên theo định lý Thales, ta có N là trung điểm của ST . Do đó nếu gọi X là giao của AN với BC thì từ $ST \parallel BH$ ta cũng suy ra X là trung điểm của BH . Gọi G là hình chiếu vuông góc của P lên AX , vẽ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH và gọi G' là đối xứng của G qua X .

Dễ thấy $\angle AG'A' = 90^\circ$ nên nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tứ giác $BPHA'$ là hình bình hành. Hơn nữa $A'G' \parallel PG$ nên $PGA'G'$ là hình bình hành. Do đó các điểm P, G đối xứng với A', G' qua X . Mà tứ giác $BG'A'H$ nội tiếp nên tứ giác $BPGH$ nội tiếp.

Từ các tứ giác nội tiếp $AKGL$ (nội tiếp đường tròn đường kính AP) và $KSLT$, ta suy ra

$$NG \cdot NA = NK \cdot NL = NS \cdot NT$$

Do đó, tứ giác $ASGT$ nội tiếp. Mặt khác, ta lại có

$$\angle AGT = \angle AST = \angle ABH = \angle AG'H = \angle GG'H = \angle BGG'.$$

Suy ra T, G, B thẳng hàng. Tương tự, ta cũng có H, G, S thẳng hàng.

Từ $ST \parallel BH$ suy ra đường tròn ngoại tiếp hai tam giác GTS và GBH tiếp xúc với nhau tại G . Do đó hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác AST và BPR tiếp xúc với nhau tại G .

Câu 4.

Bất đẳng thức đã cho viết lại thành

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 4 \geq \frac{4}{abc} + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \text{ hay}$$

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 4 \geq \frac{4}{abc} + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{abc} = \frac{31}{abc}.$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ hay $xy + yz + zx = 3xyz$. Ta đưa về chứng minh

$$3(x + y + z)^2 + 4 \geq 31xyz.$$

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx$ và $r = xyz$ thì ta có $q = 3r$. Ta cần có

$$3p^2 + 4 \geq 31r.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì $(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 9xyz$ nên $x+y+z \geq 3$ hay $p \geq 3$.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \text{ nên}$$

$$r \geq (p-2x)(p-2y)(p-2z).$$

Khai triển ra ta được $r \geq p^3 - 2p^2(x+y+z) + 4p(xy+yz+zx) - 8xyz$ hay

$$9r \geq -p^3 + 12pr \text{ và } \frac{p^3}{12p-9} \geq r.$$

Ta đưa về chứng minh $3p^2 + 4 \geq \frac{31p^3}{12p-9}$, quy đồng và khai triển, ta có

$$(p-3)(5p^2-12p+12) \geq 0, \text{ đúng do } p \geq 3.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho là đúng, ta có điều phải chứng minh.

----- **HẾT** -----