

MÔN THI: TOÁN (đề thi dành cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ 9x^3 = xy^2 + 70(x - y) \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x} + 8\sqrt{2x-1} = 24 + 3\sqrt{(5-x)(2x-1)}.$

Câu 2.

a) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2y^2 - 16xy + 99 = 9x^2 + 36y^2 + 13x + 26y.$

b) Với a, b là những số thực dương thỏa mãn:

$$2 \leq 2a + 3b \leq 5 \text{ và } 8a + 12b \leq 2a^2 + 3b^2 + 5ab + 10.$$

Chứng minh rằng: $3a^2 + 8b^2 + 10ab \leq 21.$

Câu 3.

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M, N thuộc (O) sao cho các đường thẳng CM và BN cùng song song với đường thẳng AD .

a) Chứng minh rằng $AM = AN$.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN . Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP và AD đồng quy.

Câu 4.

Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)} + \frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)} + \frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)} \geq 4.$$

----- HẾT -----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Phương trình thứ hai của hệ tương đương:

$$\begin{aligned}9x^3 - xy^2 &= 70(x - y) \\ \Leftrightarrow 7(9x^3 - xy^2) &= 70(x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - 10y^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + 2xy + 5y^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = y = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Ta có: $x = y = 0$ không thỏa hệ.

$$\text{Với } x = 2y, \text{ ta có: } 7y^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Với $y = 1$, ta có: $x = 2$.

Với $y = -1$, ta có: $x = -2$.

Vậy hệ cho có hai nghiệm $(x; y) = (-2; -1), (2; 1)$.

b) Điều kiện: $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Đặt $a = \sqrt{5-x}$, $b = \sqrt{2x-1}$ với $a, b \geq 0$ và $2a^2 + b^2 = 9$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}11a + 8b &= 24 + 3ab \\ \Leftrightarrow 3(2a + b) + 5(a + b) &= 15 + 2a^2 + b^2 = 3ab \\ \Leftrightarrow 3(2a + b) + 5(a + b) &= 15 + (2a + b)(a + b) \\ \Leftrightarrow (2a + b - 5)(a + b - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Trường hợp $2a + b = 5$ kết hợp với $2a^2 + b^2 = 9$, ta có: $2a^2 + (5-2a)^2 = 9 \Leftrightarrow (a-2)(3a-4) = 0$.

Với $a = 2$, ta có: $x = 1$. Với $a = \frac{4}{3}$, ta có: $x = \frac{2}{9}$.

Trường hợp $a + b = 3$ kết hợp với $2a^2 + b^2 = 9$, ta có: $2a^2 + (3-a)^2 = 9 \Leftrightarrow a(a-2) = 0$.

Với $a = 2$, ta có: $x = 1$. Với $a = 0$, ta có: $x = 5$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = \frac{2}{9}, x = 1, x = 5$.

Câu 2.

a) Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}x^2y^2 + 20xy + 100 &= 9(x^2 + 4xy + y^2) + 13(x + 2y) + 1 \\ \Leftrightarrow (xy + 10)^2 &= 9(x + 2y)^2 + 13(x + 2y) + 1.\end{aligned}$$

Đặt $x + 2y = a$, ta có: $9a^2 + 13a + 1$ là số chính phương với $a > 0$.

Mà $(3a + 1)^2 < 9a^2 + 13a + 1 < (3a + 3)^2$, do đó $9a^2 + 13a + 1 = (3a + 2)^2 \Leftrightarrow a = 3$.

Với $a = 3$, ta có $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy hệ cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

b) Ta có: $8a + 12b \leq 2a^2 + 3b^2 + 5ab + 10 \Leftrightarrow 4(2a + 3b) \leq (2a + 3b)(a + b) + 10 \quad (1)$.

Đặt $x = 2a + 3b$, $y = a + b$ với $2 \leq x \leq 5$. Ta có: (1) trở thành: $4x \leq xy + 10 \Leftrightarrow \frac{y}{2} + \frac{5}{x} \geq 2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $x^2 - y^2 \leq 21 \Leftrightarrow x^2 + 4 \leq y^2 + 25$.

Ta có:

$$y^2 + 25 = 4\left(\frac{y^2}{4} + \frac{25}{x^2}\right) + 25\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \geq 2\left(\frac{y}{2} + \frac{5}{x}\right)^2 + 25\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \geq 8 + 25\left(1 - \frac{4}{x^2}\right).$$

Ta cần chứng minh: $8 + 25\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \geq x^2 + 4$. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

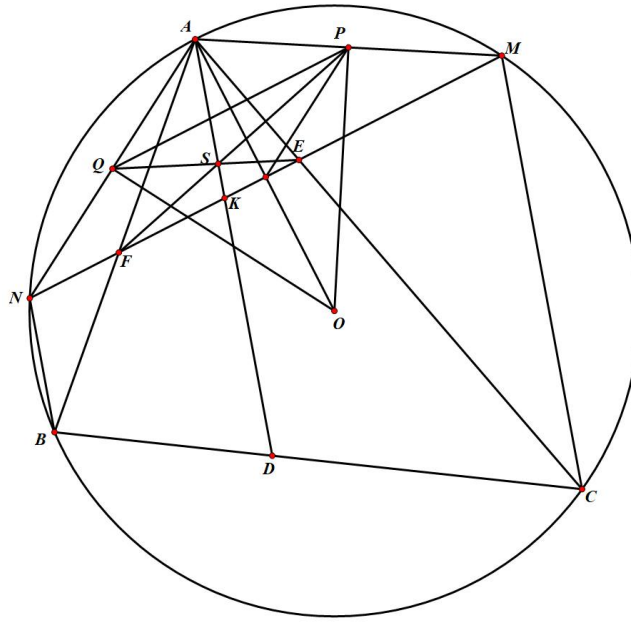
$$x^4 - 29x^2 + 100 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - 5)(x + 5) \leq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $2 \leq x \leq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$, $y = 2$ hay $a = b = 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 3.



a) Do BN và CM cùng song song với AD kết hợp với AD là phân giác $\widehat{BAC}$, ta có:

$$\widehat{NBC} = \widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \widehat{ACM}.$$

Suy ra: $\widehat{NBC} = \widehat{ACM}$ hay $\widehat{AN} = \widehat{AM} \Rightarrow AN = AM$.

b) Ta có: $\widehat{AFE} = \frac{\text{sd} \widehat{AM} + \text{sd} \widehat{BN}}{2} = \frac{\text{sd} \widehat{AN} + \text{sd} \widehat{BN}}{2} = \frac{\text{sd} \widehat{AB}}{2} = \widehat{ACB}.$

Do đó $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi S là giao điểm của EQ và AD , K là giao điểm của AD và EF .

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ANK có cát tuyến ESQ , ta có:

$$\frac{QA}{QN} \cdot \frac{EN}{EK} \cdot \frac{SK}{SA} = 1 \text{ hay } \frac{EN}{EK} \cdot \frac{SK}{SA} = 1 \text{ do } Q \text{ là trung điểm } AN.$$

Suy ra: $\frac{EN}{EK} = \frac{SA}{SK}.$

Gọi S' là giao điểm của FP và AD .

Tương tự áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AMK có cát tuyến $PS'F$, ta được: $\frac{S'A}{S'K} = \frac{FM}{FK}.$

Ta cần chứng minh $\frac{EN}{EK} = \frac{FM}{FK}$ hay $\frac{FM}{EN} = \frac{FK}{EK}$. Thật vậy, theo định lý Tales, ta có:

$$\frac{KM}{KN} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{FK}{EK}.$$

Suy ra: $\frac{FK}{EK} = \frac{KM}{KN} = \frac{FK + KM}{EK + KN} = \frac{FM}{EN}.$

Do đó $\frac{FM}{EN} = \frac{FK}{EK}$, hay $\frac{FM}{FK} = \frac{EN}{EK}$.

Từ đó ta có: $\frac{SA}{SK} = \frac{S'A}{S'K}$.

Suy ra $S \equiv S'$ hay EQ , FP và AD đồng quy.

Câu 4.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwars, ta có:

$$\sum \frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)} = \sum \frac{(a^2+abc)^2}{ab(ab+2c^2)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{\sum ab(ab+2c^2)} = \left(\frac{a^2+b^2+c^2+3abc}{ab+bc+ca} \right)^2$$

Ta cần chứng minh: $\frac{a^2+b^2+c^2+3abc}{ab+bc+ca} \geq 2$.

Thật áp dụng bất đẳng thức Schur kết hợp với $a+b+c=3$, ta có:

$$a^2+b^2+c^2+3abc = a^2+b^2+c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

----- HẾT -----