

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH THUẬN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN HƯNG ĐẠO
NĂM HỌC: 2020 - 2021**

Môn thi: **TOÁN** (Hệ số 2 - Chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ xy + x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$$

Câu 2.

- a) Cho p và $p+2$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p+1$ chia hết cho 6.
b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2p+1$ là lập phương của một số nguyên dương.

Câu 3.

Cho các số thực $x, y, z \geq 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Câu 4.

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi K là một điểm tùy ý trên cạnh BC với $K \neq B, K \neq C$. Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKF và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK . Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Câu 5.

Cho 20 điểm phân biệt trong mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại đường tròn có đúng 12 điểm đã cho bên trong và có đúng 8 điểm đã cho bên ngoài.

...Hết...

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Đặt $S = x + y$, $P = xy$ với $S^2 \geq 4P$. Khi đó hệ cho trở thành:
$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + S - 12 = 0 \end{cases}.$$

Ta có: $S^2 + S - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ S = -4 \end{cases}.$

Với $S = 3$, ta có: $P = 2$. Khi đó $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, y = 1 \\ y = 2, x = 1 \end{cases}.$

Với $S = -4$, ta có: $P = 9$. Loại vì $S^2 < 4P$.

Vậy hệ cho có hai nghiệm $(x; y) = (2; 1), (1; 2)$.

Câu 2.

a) Ta có: p lẻ và $p > 3$ nên p chia 3 dư 1 hoặc 2.

Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ suy ra $p + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ vô lí do $p + 2$ là số nguyên tố lớn hơn 3.

Do đó $p \equiv 2 \pmod{3}$ nên $p + 1 \equiv 0 \pmod{6}$. Hay $p + 1$ chia hết cho 6.

b) Vì $2p + 1$ là lập phương một số tự nhiên nên đặt $2p + 1 = a^3$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và a lẻ.

Khi đó ta có: $2p = (a - 1)(a^2 + a + 1)$.

Do a lẻ nên $a - 1$ chẵn và $a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ lẻ nên suy ra $a - 1 = 2$.

Khi đó $a = 3$, ta có: $p = \frac{3^3 - 1}{2} = 13$.

Vậy $p = 13$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{1} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow 1 = \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}.$

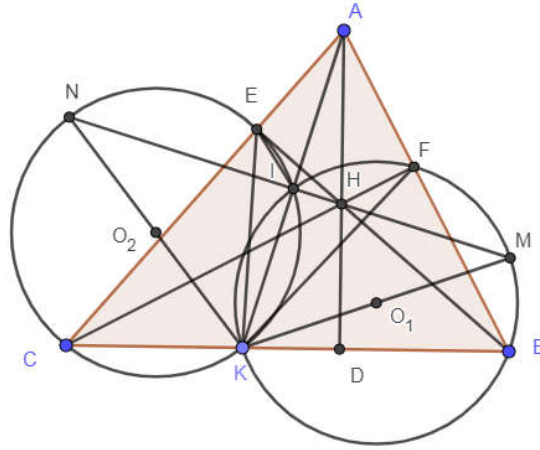
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwars, ta có:

$$x + y + z = (x + y + z) \left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

Suy ra: $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2}.$

Câu 4.



Ta có: $AF \cdot AB = AE \cdot AC$ do tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

Gọi I là giao điểm của AK với (BFK) , ta có: $AI \cdot AK = AF \cdot AB = AE \cdot AC$ (1).

Gọi I' là giao điểm của AK với (CEK) , ta có: $AI' \cdot AK = AE \cdot AC = AF \cdot AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$.

Hay AK đi qua I là giao điểm thứ hai của đường tròn (BFK) và (CEK) với $K \neq I$.

Ta có $\widehat{EIF} = \widehat{EIA} + \widehat{AIF} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

Suy ra tứ giác $AEIF$ nội tiếp.

Mà tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên năm điểm A, E, I, F, F cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra: $\widehat{AIH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ hay $HI \perp IK$ (3).

Mặt khác $\widehat{MIK} = \widehat{NIK} = 90^\circ$ nên M, I, N thẳng hàng và $MN \perp IK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra M, H, N thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 5.

Trước hết ta chứng minh tồn tại một điểm P mà khoảng cách từ P đến 20 điểm đã cho là khác nhau. Thật vậy, khoảng cách từ P đến hai điểm A, B bằng nhau khi và chỉ khi P nằm trên đường trung trực của AB . Do đó chỉ cần chọn điểm P không nằm trên đường trung trực của bất cứ đoạn thẳng nào tạo bởi 20 điểm đã cho.

Gọi khoảng cách của P đến 20 điểm đã cho lần lượt là $d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_{20}$. Xét đường tròn tâm P bán kính d_{12} , đường tròn này chứa đúng 12 điểm có khoảng cách đến P gần nhất. Ta có điều phải chứng minh.

----- HẾT -----