

Bài 1 (1.5 điểm).

Cho biểu thức $P = \frac{a^2 + b\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} + \frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, với $a > b > 0$.

a) Thu gọn P .

b) Chứng minh $P > 0$.

Bài 2 (2 điểm).

a) Giải phương trình $(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1}) = 0$.

b) Cho đường thẳng $d: y = (m + 1)x + m.n$ và đường thẳng $d_1: y = 3x + 1$. Tìm m, n biết d đi qua điểm $A(0; 2)$, đồng thời d song song d_1 .

Bài 3 (1.5 điểm). Gọi (P) , (d) lần lượt là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và $y = 2x + m$

a) Tìm m sao cho (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$.

b) Tìm m sao cho $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5$.

Bài 4 (2 điểm).

a) Công ty viễn thông X có hai gói cước gọi điện hàng tháng được tính như sau:

- **Gói I:** 1.800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên, 1.500 đồng/phút cho 60 phút tiếp theo và 1.000 đồng/phút cho thời gian còn lại.
- **Gói II:** 2.000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1.800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo, 1.200 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo nữa và 800 đồng/phút cho thời gian còn lại.

Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác An chọn gói cước II vì so với gói cước I bác An sẽ tiết kiệm được 95.000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác An gọi bao nhiêu phút?

b) Tam giác ABC có $AB = 3cm$, $AC = 4cm$ và $BC = 5cm$. Vẽ phân giác BD của góc $\widehat{ABC}$, (D thuộc cạnh AC). Tính độ dài BD .

Bài 5 (3 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (T) có tâm O , bán kính R . Cạnh $BC = R\sqrt{3}$. Tiếp tuyến tại B, C của (T) cắt nhau tại P . Cắt tuyến PA cắt (T) tại D (khác A). Đường thẳng OP cắt BC tại H .

a) Chứng minh tam giác PBC đều; tính $PA.PD$ theo R .

b) Đường thẳng AH cắt đường tròn (T) tại E (E khác A). Chứng minh $HA.HE = HO.HP$ và $PD = PE$.

c) Trên tia AB lấy I thỏa $AI = AC$, trên tia AC lấy điểm J thỏa $AJ = AB$. Đường thẳng vuông góc với AB tại I và đường thẳng vuông góc AC tại J cắt nhau ở K . Chứng minh $IJ = BC$; AK vuông góc BC và tính KP theo R .

----- hết -----

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm
1a (1,0đ)	$\frac{a^2 + b\sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3]}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$	0,25
	$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a - \sqrt{ab} + b.$	0,25
	$\frac{a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(a - 3\sqrt{ab} + 2b)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$	0,25
	$= \sqrt{a}(\sqrt{a} - 2\sqrt{b}) = a - 2\sqrt{ab}.$ Suy ra $P = 2a - 3\sqrt{ab} + b.$	0,25
1b (0,5đ)	Ta có $P = 2a - 3\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(2\sqrt{a} - \sqrt{b}).$	0,25
	Do $a > b > 0$ nên $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ và $2\sqrt{a} > \sqrt{b}$, suy ra $P > 0.$	0,25
2a (1,25đ)	Điều kiện $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}.$	0,25
	Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1} = 0. \end{cases}$	0,25
	• $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$	0,25
	• $\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{x + 1} = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$	0,25
	Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}.$	0,25
2b (0,75đ)	$A \in (d)$ suy ra $mn = 2.$	0,25
	$(d) (d_1)$ suy ra $m + 1 = 3$ (và $mn \neq 1$).	0,25
	Từ hai điều trên ta được giá trị m, n cần tìm là $m = 2; n = 1.$	0,25
3a (0,5đ)	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0.$	0,25
	(P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 4 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$	0,25
3b (1,0đ)	Với điều kiện trên, ta được $y_1 = 2x_1 + m; y_2 = 2x_2 + m$, nên $y_1 - y_2 = 2(x_1 - x_2).$	0,25
	$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow 2^2 - 4(-m) = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$ (thỏa mãn).	0,25

Câu	DÁP ÁN	Điểm
4a (1,0đ)	Gọi t (phút) là thời gian trung bình mà bác An gọi mỗi tháng và $P(t)$ (ngàn đồng) là số tiền chênh lệch giữa gói cước I và gói cước II. Nhận xét rằng $t > 60$.	0,25
	- Nếu $60 < t \leq 90$ thì $P(t) = [1,8 \times 60 + 1,5(t - 60)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2(t - 60)] = 0,3(t - 60) - 6$, nên $P(t) = 95 \Leftrightarrow t \approx 396,67 > 90$ (không thỏa mãn). - Nếu $90 < t \leq 120$ thì $P(t) = [1,8 \times 60 + 1,5(t - 60)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2 \times 30 + 0,8(t - 90)] = 0,7t - 60$, nên $P(t) = 95 \Leftrightarrow t \approx 221,43 > 120$ (không thỏa mãn).	0,25
	Nếu $t > 120$ thì $P(t) = [1,8 \times 60 + 1,5 \times 60 + (t - 120)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2 \times 30 + 0,8(t - 90)] = 0,2t$,	0,25
	nên $P(t) = 95 \Leftrightarrow t = 475$ (thỏa mãn). Vậy trung bình mỗi tháng bác An gọi 475 phút.	0,25
4b (1,0đ)	Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{3}{5}$.	0,25
	Suy ra $\frac{DA}{3} = \frac{DC}{5} = \frac{DA + DC}{3 + 5} = \frac{AC}{8} = \frac{1}{2}$. Do đó $DA = \frac{3}{2}$.	0,25
	Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A . Suy ra $\triangle ABD$ cũng vuông tại A .	0,25
	Do đó $DB^2 = DA^2 + AB^2 = \frac{45}{4}$. Suy ra $DB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.	0,25
5a (1,0đ)	Ta có $\sin \widehat{BOH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{BOH} = 60^\circ$. Suy ra $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{BPC} = 60^\circ$.	0,25
	Mà tam giác PBC cân tại P , nên $\triangle PBC$ đều.	0,25
	Xét $\triangle PDB$ và $\triangle PBA$ có $\widehat{P}$ chung và $\widehat{PDB} = \widehat{PBC}$, nên $\triangle PDB \sim \triangle PBA$.	0,25
	Suy ra $PA \cdot PD = PB^2 = 3R^2$.	0,25
5b (1,0đ)	Ta có $\triangle HAB \sim \triangle HCE$ (g-g) nên $HA \cdot HE = HB \cdot HC$.	0,25
	Mà $HB \cdot HC = HB^2 = HO \cdot HP$. Suy ra $HA \cdot HE = HO \cdot HP$	0,25
	Do đó $\triangle HAO \sim \triangle HPE$, nên tứ giác $OAPE$ nội tiếp.	0,25
	Suy ra $\widehat{POE} = \widehat{PAE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE}$, nên $\widehat{DOP} = \widehat{EOP}$. Suy ra $\triangle DOP = \triangle EOP$ (c-g-c). Do đó $PE = PD$.	0,25
5c (1,0đ)	Từ giả thiết ta được $\triangle ABC = \triangle AJI$ (c-g-c), nên $BC = IJ$.	0,25
	Tứ giác $AIKJ$ nội tiếp nên $\widehat{AKI} = \widehat{AJI} = \widehat{ABC}$. Mà $\widehat{AKI} + \widehat{IAK} = 90^\circ$, nên $\widehat{ABC} + \widehat{IAK} = 90^\circ$. Suy ra $AK \perp BC$.	0,25
	Do AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AJI$ và $\triangle AJI = \triangle ABC$ nên $AK = 2R$.	0,25
	Ta có $OB = OP \cos 60^\circ$ nên $OP = 2OB = 2R$. Mà $AK \parallel OP$ và $AK = OP = 2R$ nên tứ giác $AKPO$ là hình bình hành, do đó $PK = OA = R$.	0,25

