

Bài 1. (1,5 điểm)

- Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + a + a\sqrt{a}}$ ($a > 0; a \neq 1$)
- Cho hàm số $y = (m - 2)x + 2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).
 - Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
 - Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Bài 2. (1,5 điểm)

- Cho a là số nguyên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - 2021^2$ chia hết cho 24.
- Cho các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p + q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng :
 - $p = 2q + 1$.
 - $p^2 + q^{2021}$ không phải là số chính phương.

Bài 3. (2,5 điểm).

- Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y + 6} + 2y = 1 \end{cases}$$
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 2m - 2} + \sqrt{x_2} = 3$.
- Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c + a)(c + b) = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(c+b)^2} \geq 1.$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 4\text{cm}$ và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

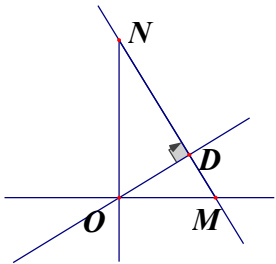
- Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$.
- Gọi M là điểm đối xứng của A qua BC, N là điểm đối xứng của B qua AC. Chứng minh rằng : $CD.CN = CE.CM$.
- Trong trường hợp 3 điểm C, M, N thẳng hàng, tính độ dài đoạn thẳng AB.
- Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng AI cắt EF tại K. Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên BC. Chứng minh rằng đường thẳng AH luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Bài 5. (1 điểm)

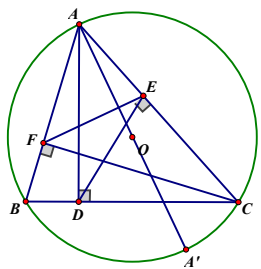
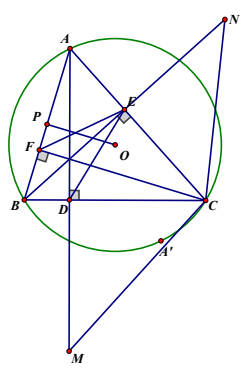
Cho tập hợp S gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất: tổng của 3 phần tử bất kì trong S đều là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n.

ĐÁP ÁN

Bài 1. 1.1. $A = \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + a + a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a} + a)}{(\sqrt{a^4} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1)}$$= \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a} + a)}{\sqrt{a}(\sqrt{a^3} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{a + \sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a^3} - 1)(\sqrt{a} + 1)}$$= \frac{a + \sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{1}{a - 1}$ Vậy $A = \frac{1}{a-1}$ 1.2. a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 > 0$ $\Leftrightarrow m > 2$ b) Với $m = 2$, (d): $y = 2$ cách O một khoảng bằng 2, (không thỏa) Với $m \neq 2$, gọi M, N lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành, trục tung. Hoàng độ của M là nghiệm của phương trình: $(m - 2)x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2 - m}$$\Rightarrow OM = \frac{2}{ 2 - m }$ Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $ON = 2$ Gọi OH là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d), áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OMN ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{(2 - m)^2}{4} + \frac{1}{4}$ mà $OH = 1$ nên $\frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 = 4 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 3$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = \sqrt{3} \\ m - 2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{3} \\ m = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 2. 2.1. Vì a là số nguyên lẻ nên $a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Từ đó $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 4k(k + 1) : 8 \quad (1) \text{ vì } k(k + 1) : 2$ Mặt khác, a không chia hết cho 3 nên $a = 3q \pm 1, q \in \mathbb{Z}$ $a^2 = 9q^2 \pm 6q + 1 \Rightarrow a^2 - 1 : 3 \quad (2)$ Từ (1) và (2), ta được $a^2 - 1 : 24$ Từ đó: $a^2 - 2021^2 = (a^2 - 1) - (2021^2 - 1) = (a^2 - 1) - 2020.2022$$= (a^2 - 1) - 2^2.5.101.2.3.337 : 24$ 2.2. a) Đặt $p + q^2 = n^2, n \in \mathbb{N}$ Suy ra $p = (n - q)(n + q)$ Vì p là số nguyên tố nên $\begin{cases} n - q = 1 \\ n + q = p \end{cases}$. Do đó $p = 2q + 1$ b) Giả sử $p^2 + q^{2021}$ là số chính phương, đặt $p^2 + q^{2021} = m^2$ Suy ra $q^{2021} = (m - p)(m + p)$. Có 2 trường hợp: TH1:	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm



$\begin{cases} m - p = 1 \\ m + p = q^{2021} \end{cases} \Rightarrow a^{2021} - 1 = 2p = 4q + 2 \Rightarrow q^{2021} = 4q + 3. \text{ Suy ra } 2 : q. \text{ Từ đó: } q = 3$ Tuy nhiên, khi đó đẳng thức $q^{2021} = 4q + 3$ không xảy ra TH2: $\begin{cases} m - p = q^a \\ m + p = q^b \end{cases} \text{ với } a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2021. \text{ Suy ra } q^b - q^a = 2p = 4q + 2$ Từ đó $2 : p$ và $q = 2$ Khi đó $2^b - 2^a = 10 \Rightarrow 2^{a-1}(2^{b-a} - 1) = 5$ Suy ra $\begin{cases} 2^{a-1} = 1 \\ 2^{b-a} = 5 \end{cases} \Rightarrow 2^{b-a} = 6 \text{ (vô lý)}$ Tóm lại, 2 trường hợp đều không xảy ra tức là điều giả sử sai hay nói cách khác $p^2 + q^{2021}$ không phải số chính phương.	0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 3. 3.1. $\begin{cases} 2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + y + 6} + 2y = 1 & (2) \end{cases}$ Từ (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - xy - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x(2x - y) + 4y(2x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (x + 4y)(2x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = -4y \end{cases}$ Thay $x = -4y$ vào (2) ta được $\sqrt{16y^2 + y + 6} = 1 - 2y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ 16y^2 + y + 6 = (1 - 2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ 12y^2 + 5y + 5 = 0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$ Thay $y = 2x$ vào (2) ta được $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 1 - 4x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 6 = 1 - 8x - 16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ 15x^2 - 10x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ Với $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$ Vậy hệ có nghiệm $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ 3.2 Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4(2m - 2) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m < \frac{33}{8} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{33}{8}$ $x_1 + x_2 = 5; x_1 \cdot x_2 = 2m - 2$ và $x_1^2 - x_1 + 2m - 2 = 0$ $\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 2m - 2} + \sqrt{x_2} = 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2} + x_1 + \sqrt{x_2} = 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$ $\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow 2m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn) Vậy $m = 3$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

3.3. Đặt $x = c + a, y = c + b$. Khi đó $xy = 4$ Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 1$ Ta có: $\begin{aligned} \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 \cdot y^2} \\ &= \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2 + 2xy}{x^2 y^2} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2 + 8}{16} \\ &= \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{16} + \frac{1}{2} \end{aligned}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{16} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)^2}{16}} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 1 \text{ (đpcm)}$ S	0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 4. a.) Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Khi đó tam giác ACA' vuông tại $C \Rightarrow \widehat{CAO} = 90^\circ - \widehat{AA'C}$ Lại có : $\widehat{BAD} = 90^\circ - \widehat{ABC}$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$ (cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{BAD}$ 	0,5 điểm 0,5 điểm
b) Các tam giác vuông CAD và CBE có góc C chung nên đồng dạng: $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow CA.CE = CB.CD$ Vì A, M đối xứng với nhau qua BC nên $CA = CM$.Tương tự $CB = CN$. $\Rightarrow CD.CN = CE.CM$ 	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Ta có : $\sin \widehat{AOP} = \frac{AP}{AO} \Rightarrow AP = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2AP = 4\sqrt{3}$	
d) Gọi J là trung điểm của EF Các tam giác AEF và ABC có góc A chung và $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (do tứ giác BCEF nội tiếp) nên đồng dạng $\Rightarrow$ $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ Mà $\frac{EF}{BC} = \frac{2EJ}{BI} = \frac{EJ}{BI} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EJ}{BI} \Rightarrow \Delta AEJ \sim \Delta ABI \Rightarrow$ $\widehat{AJE} = \widehat{AIB}$ Ta có: Tam giác IEF cân tại I (vì IE = IF = 1/2BC) $\Rightarrow$ $IJ \perp EF$. Tứ giác IKJH có : $\widehat{IHK} = \widehat{IJK} = 90^\circ$ nên nội tiếp $\Rightarrow : \widehat{AJE} + \widehat{HJK} = \widehat{AIB} + \widehat{HJK} = 180^\circ \Rightarrow A, J, H \text{ thẳng hàng. (1).}$ Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T. Ta có : $OA^2 = OB^2 = OI \cdot OT \Rightarrow \frac{OA}{OI} = \frac{OT}{OA}$ mà góc góc A chung $\Rightarrow \Delta OAI \sim \Delta OTA$ $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OTA}$ mà $\widehat{OTA} = \widehat{DAT}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{DAT}$. Lại có : $\widehat{BAD} = \widehat{CAO} \Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{CAI} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAT}$ Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAJ}$ (tam giác đồng dạng) $\Rightarrow \widehat{CAT} = \widehat{CAJ} \Rightarrow A, J, T$ thẳng hàng (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH luôn đi qua điểm T cố định khi A di chuyển.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 5. Đặt $S = \{s_1; s_2; \dots; s_n\}$ Vì khi chia một số nguyên dương bất kỳ cho 3, ta có ba loại số dư là : 0; 1; 2 nên ta chia các số $s_1; s_2; \dots; s_n$ thành 3 nhóm: Nhóm I gồm các số chia 3 dư 1. Nhóm II gồm các số chia 3 dư 2. Nhóm II gồm các số chia hết chi 3. Nếu $n \geq 5$ thì xây ra một trong hai TH sau: TH1: Mỗi nhóm có ít nhất 1 phần tử: Không mất tổng quát, giả sử $s_1; s_2; s_3$ lần lượt thuộc nhóm I, nhóm II, nhóm III. $\Rightarrow s_1 + s_2 + s_3 : 3 \text{ và } s_1 + s_2 + s_3 > 3 \text{ nên } s_1 + s_2 + s_3 \text{ không phải là số nguyên tố.}$ TH2: Có ít nhất một nhóm nào đó không có phần tử. Khi có n số $s_1; s_2; \dots; s_n$ được chia tối đa 2 nhóm mà $n \geq 5$ nên luôn tồn tại ít nhất 3 số thuộc cùng một nhóm. Hiển nhiên tổng 3 số đó chia hết cho 3 và do đó cũng không	0,25 0,25

phải là số nguyên tố.	
Tính lại, tất cả các tập hợp gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau mà $n \geq 5$ đều không thỏa mãn tính chất nêu ở đề bài.	0,25
Xét tập hợp {1;3;7;9}	
Ta có: $1+3+7 = 11$; $1+3+9 = 13$; $1+7+9 = 17$; $3+7+9 = 19$; và 11, 13, 17, 19 đều là các số nguyên tố nên tập hợp {1;3;7;9} thỏa mãn tính chất đề bài	
Vậy giá trị lớn nhất có thể của n là 4.	0,25