SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn thi: **TOÁN (Chuyên Toán)**
Ngày thi: 20/6/2022
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x^2 - 4x + 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$.

2) Cho các số thực a, b và c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Bài II *(2,0 điểm)*

1) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1} - 7$ chia hết cho 20.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $y(x^2 + x + 1) = (x+1)(y^2 - 1)$.

Bài III *(2,0 điểm)*

1) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m^3}{m+n}$ và $\dfrac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố.

2) Với a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$.

Bài IV *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA và AB lần lượt tại ba điểm D, E và F.

1) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF. Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI.

2) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.

3) Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID.

Bài V *(1,0 điểm)*

Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x + y$ với $x \in A$ và $y \in A$ (x, y không nhất thiết phân biệt).

1) Chứng minh $68 \in B$.

2) Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp.

.... Hết ....

Giải chi tiết đề thi Toán Chuyên Sở GD Hà Nội 2022

Nguyễn Duy Khương - Nguyễn Hoàng Việt - Trịnh Đình Triển - Nguyễn Văn Hoàng

1 Câu I

1) Giải phương trình: $x^2-4x+2\sqrt{2x-1}+1=0$

2) Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị biểu thức:
$$P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}-\frac{2}{a+b+c-abc}$$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x\geq\frac{1}{2}$

Phương trình đề cho tương đương:
$$x^2-2x+1=(2x-1)-2\sqrt{2x-1}+1$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2=(\sqrt{2x-1}-1)^2$$

TH1: $x-1=\sqrt{2x-1}-1\Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2x-1\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

TH2: $x-1=1-\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2-x=\sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-x)^2=2x-1\\2-x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+5=0\\x\leq2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

2) Từ giả thiết, ta biến đổi:

$\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{ab+bc+ca+a^2}=\frac{ab+ac}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+b^2}=\frac{bc+ba}{(a+b)(b+c)(c+a)}$; $\frac{c}{1+c^2}=\frac{ca+cb}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Rightarrow P=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{2}{a+b+c-abc}$

Mà $ab+bc+ca=1$

$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a+b+c-abc$

$\Rightarrow P=0$

Vậy $P=0$

2 Câu II

1) Chứng minh rằng với n là số tự nhiên lẻ thì: $3^{2n+1}-1$ chia hết cho 20.

2) Tìm các cặp số nguyên dương sao cho: $y(x^2+x+1)=(x+1)(y^2-1)$.

Lời giải

1) vì n là số tự nhiên lẻ, đặt $n=2k+1 (k\in\mathbb{N})$
$\Rightarrow S=3^{2n+1}-7=3^{4k+3}-7=81^k.27-7$
Nhận thấy, $81\equiv 1(\bmod 20)\Rightarrow S\equiv 1^k.27-7=27-7\equiv 0(\bmod 20)$
Hay S chia hết cho 20 (điều phải chứng minh).

2) Phương trình tương đương với:

$$yx^2+yx+y=xy^2+y^2-x-1\Leftrightarrow xy(x-y)+y(x-y)=-(x+y+1)$$

$$\Leftrightarrow y(x+1)(x+1-y-1)=-(x+1+y).$$

Đặt $a=x+1, a\geq 2$. phương trình tương đương với

$$ay(y+1-a)=a+y.$$

Vì $ay>0$ và $a+y>0$ nên $y+1-a>0$. Suy ra $y+1-a\geq 1$. Ta lại có $(a-1)(y-1)\geq 1$ hay $ay\geq a+y-1>\dfrac{a+y}{2}$ (do $a+y\geq 3$). Do đó, nếu $y+1-a\geq 2$ thì

$$ay(y+1-a)>a+y, \text{ vô lý.}$$

Do đó, $y+1-a=1$ hay $y=a$. Khi đó, từ phương trình trên, ta cũng tìm ra được là $a^2=2a$ hay $a=2$. Như vậy, $(x,y)=(1,2)$.

Cách 2: Ta biến đổi phương trình được:
$x^2y=(x+1)(y^2-y-1)(1)$
Do $x,y>0 y^2-y-1>0$
Gọi $d=(x^2,x+1)\in\mathbb{N}^*\Rightarrow d|x+1,x^2\Rightarrow d|x^2-1\Rightarrow d|1\Rightarrow d=1$
Gọi $e=(y,y^2-y-1)\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 1|e\Rightarrow e=1$
Từ (1) $\Rightarrow x^2y\vdots x+1$, mà $(x+1,x^2)=1\Rightarrow y\vdots x+1(2)$
Lại từ (1) $\Rightarrow (y^2-y-1)(x+1)\vdots y$, mà $(y,y^2-y-1)=1\Rightarrow x+1\vdots y(3)$
Do $x,y>0$, kết hợp $(2),(3)\Rightarrow x+1=y$

Thay vào (1), ta có: $x^2 = y^2 - y - 1 = (x+1)^2 - (x+1) - 1$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

Vậy $(x; y) = (1; 2)$

3 Câu III

1. Tìm hai số nguyên dương m, n sao cho $\dfrac{m^3}{m+n}$ và $\dfrac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố.

2. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab + 2bc + 3ca - 3abc.$$

Lời giải

1. Đặt $\dfrac{m^3}{m+n} = p$, $\dfrac{n^3}{m+n} = q$. Khi đó, ta có

$$p + q = \frac{m^3+n^3}{m+n} = m^2 - mn + n^2.$$

Vì $m^3 = p(m+n)$ nên $p \mid m^3$ hay $p \mid m$. Do đó, ta suy ra $p^3 \mid p(m+n)$ hay $p^2 \mid m+n$ hay $p \mid n$. Do đó, ta suy ra

$$p \mid m^2 - mn + n^2 \implies p \mid p+q \implies p \mid q \implies p = q.$$

Vì $p = q$ nên ta suy ra $m = n$. Khi đó, ta có $p = q = \dfrac{m^2}{2}$. Khi đó, ta dễ dàng chỉ ra p, q chỉ là số nguyên tố khi $m = 2$. Vậy $m = n = 2$.

2. Ta có

$$P = ab + 2bc + 3ca - 3abc \le 2b(a+c) + 3ca(1-b).$$

- Nếu $b \ge 1$ thì
$$P \le 2b(a+c) \le \frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{9}{2}.$$
- Nếu $0 \le b \le 1$ thì ta có
$$\begin{aligned} P \le 2b(a+c) + \frac{3(a+c)^2(1-b)}{4} &= 2b(3-b) + \frac{3(3-b)^2(1-b)}{4} \\ &= \frac{-1}{4}b(21 - 13b + 3b^2) + \frac{27}{4} \le \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Do đó, ta suy ra $P \le \dfrac{27}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $(a, b, c) = \left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\right)$.

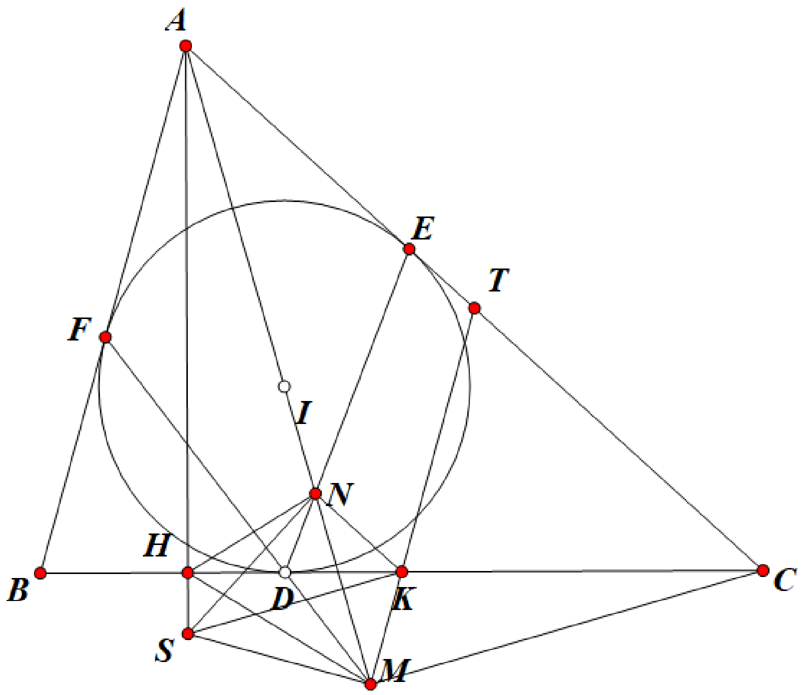
4 Câu IV

Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC,CA,AB tại lần lượt các điểm D,E,F.

1) Gọi $AI \cap DF = M$. Chứng minh rằng: $CM \perp AI$.

2) Gọi $AI \cap DE = N$. Chứng minh rằng: $DM = DN$.

3) Các tiếp tuyến tại M,N của $(K;KM)$ cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $AS \parallel ID$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương).

1) Ta có: $\widehat{MDC} = \widehat{FDB} = 90^\circ - B/2 = \widehat{MIC}$. Do đó: $IDMC$ là tứ giác nội tiếp suy ra: $\widehat{IMC} = \widehat{IDC} = 90^\circ$ hay $CM \perp AI$.

2) Gọi H là hình chiếu của A lên BC. Gọi T là trung điểm AC. Ta có: $\widehat{MTA} = 180^\circ - 2\widehat{IAC} = 180^\circ - \widehat{A} = \widehat{KTA}$ suy ra: M,K,T thẳng hàng. Suy ra: $KM \parallel AB$. Vậy $\widehat{KMD} = \widehat{DFB} = \widehat{FDB} = \widehat{KDM}$ dẫn đến: $KD = KM$. Chứng minh tương tự thì: $KN = KD$. Do đó: $KM = KN = KD$.

3) Ta có: $\widehat{DMN} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$(do $IDMC$ nội tiếp), để ý rằng: $AHMC$ nội tiếp dẫn đến: $\widehat{HMA} = \widehat{HCA}$ do đó: MD là phân giác góc HMN. Tương tự thì:

ND là phân giác góc HNM dẫn đến: D là tâm nội tiếp tam giác HMN. Tương tự ý a) ta có $\widehat{BNA} = 90^\circ$ dẫn đến: $ABHN$ nội tiếp suy ra: $\widehat{NHK} = \dfrac{\widehat{A}}{2} = \widehat{NMK}$ dẫn đến $NHMK$ nội tiếp. Ta có $SNKM$ là tứ giác nội tiếp. Do đó: S,H,N,K,M cùng thuộc 1 đường tròn. Vậy ta có: $\widehat{SHK} = 90^\circ$ do đó: S,H,A thẳng hàng dẫn đến: $AS \parallel ID$.

5 Câu V

Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp các số có dạng $x+y$ với $x \in A$ và $y \in A$ (x, y không nhất thiết phân biệt).

1. Chứng minh $68 \in B$.

2. Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp.

Lời giải

1. Vì có 70 số nằm trong đoạn $[1,90]$ nên có ít nhất 40 số không nằm trong tập hợp $\{34;68;69;...;90\}$. Xét 40 số này, theo nguyên lí dirichlet, tồn tại hai số x, y nằm trong cùng một bộ thuộc một trong các bộ sau
$$(1,67);(2,66);...;(33,35).$$
Khi đó, ta có $x+y=68$ hay $68 \in B$.

2. Thực hiện tương tự cách a, ta chứng minh được $\{43;...;133\} \subset B$. Thật vậy, ta chứng minh các số thuộc tập này thuộc B.
   - Với số $43 \le t \le 90$. Khi đó, ta có $\left\lfloor \dfrac{t}{2} \right\rfloor$ bộ (x,y) mà $1 \le x, y \le 90$ sao cho $x+y=t$. Khi đó, theo nguyên lí Dirichlet, với $t-21$ số nằm trong tập từ 1 đến $t-1$ thì luôn tồn tại hai số nằm trong cùng một bộ. Điều này đúng vì
   $$t-21 \ge \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 1$$
   (ta lấy $t-21$ số từ 1 đến $t-1$ vì không xét đến $91-t$ số từ t đến 90)
   - Với số $91 \le t \le 133$ thì khi đó ta có $\left\lfloor \dfrac{t}{2} \right\rfloor - (t-91)$ bộ (x,y) mà $1 \le x, y \le 90$ sao cho $x+y=t$. Khi đó, trong $161-t$ số từ $t-90$ đến 90 thì theo

nguyên lí dirichlet, tồn tại 2 số cùng thuộc một bộ. Điều này đúng vì

$$161 - t \geq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor - (t - 91) + 1 \Leftrightarrow 69 \geq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$$