

Bài I (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.
- 2) Cho ba số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0.$$

Bài II (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.
- 2) Chứng minh với mỗi số nguyên n , số $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.

Bài III (2,0 điểm)

- 1) Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.
- 2) Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + b + c = 5$. Chứng minh $2a + 2ab + abc \leq 18$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N . Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

- 1) Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O) . Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ . Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
- 3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF . Chứng minh AB vuông góc với AK .

Bài V (1,0 điểm)

Cho A là một tập hợp con có 100 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$.

- 1) Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.
- 2) Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2, 3, 4, \dots, 22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n .

..... Hết

Giải chi tiết đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên Toán Sở Giáo Dục Hà Nội

Nguyễn Duy Khương - Hà Huy Khôi - Trần Quang Độ - Nguyễn Đức Toàn - Nguyễn Văn Hoàng

1 Câu 1

1. Giải phương trình $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0$

2. Cho ba số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

Lời giải

1) Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + \sqrt{x+1}^2 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 0 \end{aligned}$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn đề bài

2) Ta có:

$$1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = b(a+c) + a(a+c) = (a+b)(a+c)$$

Làm tương tự thì ta cũng có:

$$1 + b^2 = (b+a)(b+c)$$

$$1 + c^2 = (c+a)(c+b)$$

Áp dụng vào ta được:

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} &= \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} + \frac{b-c}{(a+b)(a+c)} + \frac{c-a}{(b+a)(b+c)} \\ &= \frac{(a^2-b^2) + (b^2-c^2) + (c^2-a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= 0\end{aligned}$$

2 Câu 2

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$
2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n , số $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49

Lời giải

1. Xét phương trình:

$$\begin{aligned}x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2y)(x+3y) + (x+2y) &= 2 \\ \Leftrightarrow (x+2y)(x+3y+1) &= 2\end{aligned}$$

Ta có bảng các trường hợp như sau:

$x+2y$	1	2	-1	-2
$x+3y+1$	2	1	-2	-1
x	1	6	3	-2
y	0	-2	-2	0

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là:

$$(1; 0); (6; -2); (3; -2); (-2; 0)$$

2. Giả sử $\exists n \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\begin{aligned}n^2 + n + 16 &: 49 \\ \Rightarrow 4n^2 + 4n + 64 &: 49 \\ \Rightarrow (2n+1)^2 + 63 &: 49 \quad (1) \\ \Rightarrow (2n+1)^2 + 63 &: 7\end{aligned}$$

$$\text{Mà } 63 : 7 \text{ nên } \Rightarrow (2n+1)^2 : 7 \Rightarrow 2n+1 : 7 \Rightarrow (2n+1)^2 : 49 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $63 : 49$ (Vô lý). Vậy giả sử sai hay $\forall n \in \mathbb{Z}$ thì $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.

3 Câu 3

1. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.
2. Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + b + c = 5$. Chứng minh:

$$2a + 2ab + abc \leq 18$$

Lời giải.

1. Theo giả thiết, ta có $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ (x khác 0).

Đặt $x + \frac{2}{x} = m$ ($m \in \mathbb{Q}$). Suy ra

$$m = \frac{x^2 + 2}{x} \Rightarrow x^2 + 2 = mx$$

Tương tự, ta cũng có $x^3 = n$ ($n \in \mathbb{Q}$). Suy ra

$$x^4 = x^3 \cdot x = nx$$

Mặt khác $P = x^3 \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) = x^4 + 2x^2$ là số hữu tỉ. Suy ra $x^4 + 2x^2 + 4$ là số hữu tỉ. Ta có:

$$x^4 + 2x^2 + 4 = nx + 2(x^2 + 2) = nx + 2mx = (n + 2m)x$$

Mà $(n + 2m)$ là số hữu tỉ và $x^4 + 2x^2 + 4 > 0$ nên $n + 2m$ khác 0. Nên x phải là số hữu tỉ.

(Nếu x vô tỉ thì $x^4 + 2x^2 + 4$ là số vô tỉ, vô lý).

Ta có điều phải chứng minh.

2. Theo giả thiết ta có a, b, c không âm và $a + b + c = 5$.

Ta dễ có $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$. Suy ra $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Áp dụng bất đẳng thức này, ta được:

$$\begin{aligned} 2a + 2ab + abc &= a(2 + b(2 + c)) \\ &\leq a \left(2 + \frac{(b + c + 2)^2}{4} \right) \\ &= (5 - b - c) \left(2 + \frac{(b + c + 2)^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Đặt $t = b + c$ ($t \geq 0$). Ta cần chứng minh:

$$(5 - t) \left(2 + \frac{(t + 2)^2}{4} \right) \leq 18$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$(t - 5) \left(2 + \frac{(t + 2)^2}{4} \right) + 18 \geq 0$$

Hay,

$$(t - 2)^2(t + 3) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng do ($t \geq 0$). Suy ra

$$2a + 2ab + abc \leq (5 - t) \left(2 + \frac{(t + 2)^2}{4} \right) \leq 18$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2, a = 3, b = 2$ và $c = 0$.

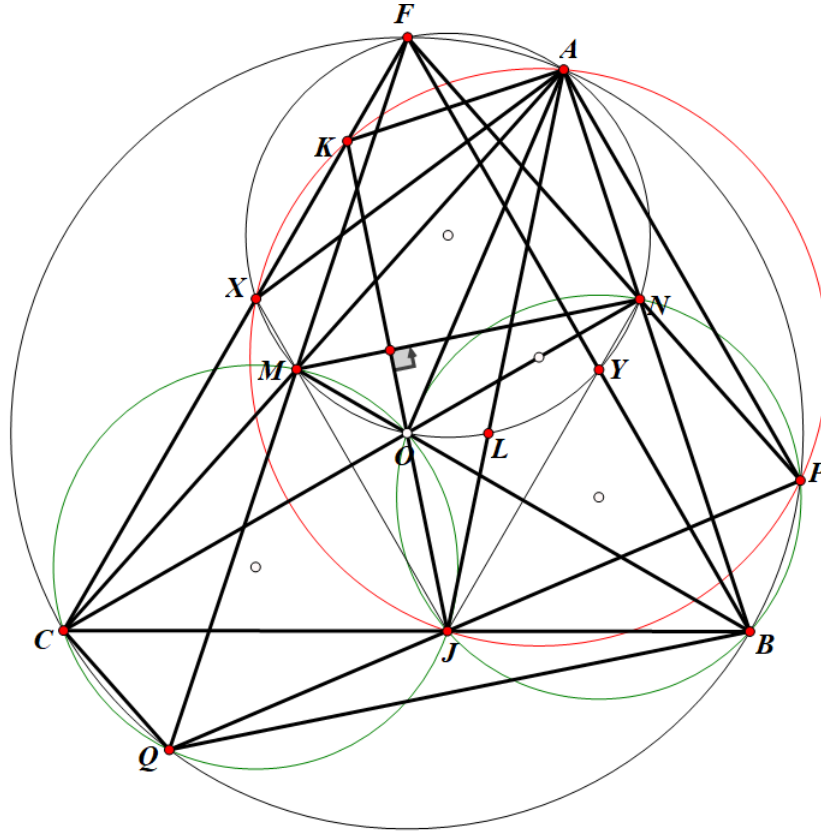
Vậy ta có điều phải chứng minh.

4 Câu 4

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , có $\angle BAC = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N . Gọi F là điểm chính giữa cung BC lớn.

1. Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O) . Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ . Chứng minh tia AJ là tia phân giác góc $\angle BAC$.
3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF . Chứng minh AB vuông góc với AK .

Lời giải.



1. Ta có: $\angle MON = \angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$ do đó: A, M, O, N cùng thuộc 1 đường tròn.

Từ đó: $CM.CA = CO.CN$ và $BM.BO = BN.BA$.

Do đó: $CM = \frac{CN.CO}{CA}$ và $BN = \frac{BM.BO}{BA}$. Ta cần: $BN = CM$.

Như vậy cần có: $\frac{CN}{CA} = \frac{BM}{BA}$ hay là: $\sin \angle ANO = \sin \angle AMO$ (đúng).

2. Từ 1) ta có: $\triangle FNB = \triangle FMC$ do đó: $NB = MC = FN = FM$ dẫn đến: $AP \parallel FB$. Tương tự: $AQ \parallel FC$. Do đó: $CQBP$ là hình thang cân.

Gọi $(COM) \cap (BON) = O, J'$. Ta có: $\angle OJ'C + \angle OJ'B = \angle OMA + \angle ONA = 180^\circ$ do đó: J', B, C thẳng hàng. Ta có: $\angle CQM = \angle FBC = 60^\circ = \angle MOC$ do đó: M, O, J', Q, C đồng viên dẫn đến: $\angle QJ'C = \angle CMQ$. Tương tự thì: $\angle PJ'B = \angle FNA = \angle FMA = \angle CMQ$ suy ra: Q, J', P thẳng hàng. Do đó: J trùng J' .

Lại có: $BN.BA = BO.BM = BJ.BC$ suy ra: $ANJC$ nội tiếp dẫn đến: $\angle JAB = \angle OCB$. Tương tự thì: $JAC = \angle OBC$ suy ra: AJ là phân giác góc BAC .

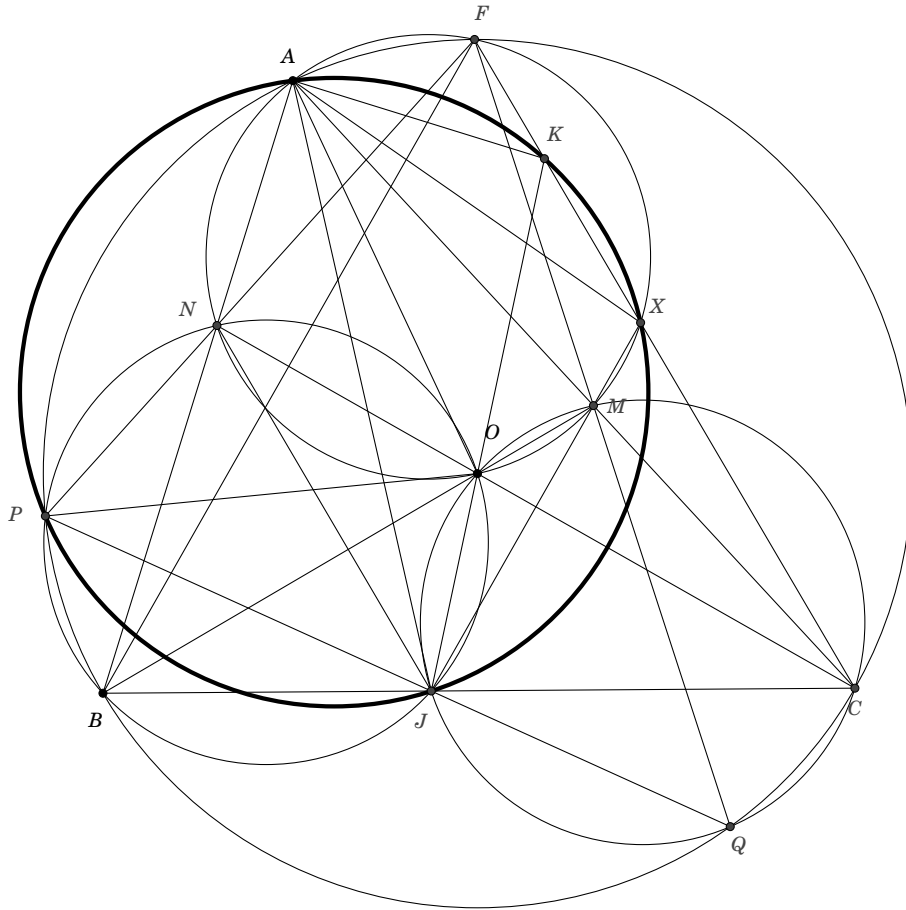
3. Ta có: $\angle COJ = \angle B$ và $\angle OJM = \angle OCA$ suy ra: $\angle COJ + \angle MJO = 90^\circ$ suy ra: $OC \perp JM$. Tương tự: $OB \perp JN$. Do đó: $JO \perp MN$. Ta có: $\angle APJ = 180^\circ - \angle ACQ$. Gọi $(AMN) \cap FC = X \neq F$, ta có: $CX \cdot CF = CO \cdot CN = CJ \cdot CB$ dẫn đến: $FXJB$ nội tiếp suy ra: $\angle AXJ = 120^\circ - \angle FXA = 120^\circ - \angle FNA$ do đó: $\angle APJ + \angle AXJ = 180^\circ$ tức là: A, P, J, X đồng viên. Cộng góc đơn giản ta có: J, X, M thẳng hàng. Tương tự: J, Y, N thẳng hàng với $Y = (AMN) \cap FB \neq F$.

Cùng từ 2) ta có: $\angle AJN = \angle ACO = \angle MJO$ dẫn đến: AJ đi qua tâm của FMN là L . Do đó: $\angle LAX = \angle LMJ = \angle OJN = \angle OBA = \angle CKJ$. Do đó: A, K, X, J, P đồng viên. Vậy tức là: $AKJP$ nội tiếp dẫn đến: $\angle JKA = \angle BNM (= 180^\circ - \angle APJ)$ dẫn đến: $KA \perp AB$.

Nhận xét. Trong quá trình làm bài toán này. Tác giả lời giải có tìm được thêm 1 vài kết quả.

- a) Chứng minh rằng: FQ cắt JK trên (AFK) .
- b) Chứng minh rằng: AJ cắt FB trên (AFK) .
- c) Chứng minh rằng: PX, CN, AJ đồng quy.

Cách khác cho câu 4.



2. Có: $\angle BFC = \frac{\angle BOC}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle FBC$ đều $\Rightarrow \angle NPB = 180^\circ - \angle FCB = 120^\circ = \angle BOC \Rightarrow$ Tứ giác $NPBO$ nội tiếp. Tương tự, $MCQO$ nội tiếp. Từ đó gọi (BON) cắt (COM) tại J' khác O thì:

$$\begin{cases} \angle OJ'C = \angle OMA = \angle ONB \Rightarrow J' \in BC \\ \angle OJ'Q = \angle OMF = \angle ONP \Rightarrow J' \in PQ \end{cases} \Rightarrow J' \equiv J$$

Và: $BM.BA = BO.BN = BJ.BC$ suy ra $AMJB$ nội tiếp suy ra $\angle JAM = \angle OBC$. Tương tự suy ra $\angle JAN = \angle OCB = \angle OBC = \angle JAM$ (đpcm)

3. Gọi JM cắt CF tại X . Có $\angle CJX = \angle COM = 60^\circ$ nên $\triangle CJX$ đều $\Rightarrow \angle CXJ = 60^\circ = \angle CAF \Rightarrow AFXM$ nội tiếp, suy ra 6 điểm A, M, O, N, F, X đồng viên.

$$\Rightarrow \angle JKX = \angle CXJ - \angle KJX = 60^\circ - \angle OCA = \angle BAC - \angle OAC = \angle OAB$$

$$\angle OAX = \angle OMJ = \angle OCB = \angle NAJ \Rightarrow \angle JAX = \angle OAB$$

Suy ra $\angle JAX = \angle JKX \Rightarrow AKXJ$ nội tiếp.

Ta có: $\triangle CFB$ và $\triangle CFX$ đều nên $FXJB$ là hình thang cân với 2 đáy

$XJ \parallel FB$. Mà $FN = FB$ nên $AFBP$ cũng là hình thang cân với $FB \parallel AP$.
 Suy ra $XJ \parallel AP$ và $XJPA$ là hình thang cân nên nó nội tiếp. Vậy 5 điểm A, K, X, J, P đồng viên $\Rightarrow \angle JAK = \angle CXJ = 60^\circ \Rightarrow \angle BAK = \angle BAJ + \angle JAK = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow AK \perp AB$ (đpcm)

5 Câu 5

Cho A là một tập hợp có 100 phần tử của tập hợp $\{1, 2, \dots, 178\}$.

1. Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.
2. Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2, 3, 4, \dots, 22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n .

Lời giải.

1. Đặt $X = \{1; 2; \dots; 178\}$

Chia các số trong X thành 89 nhóm (mỗi nhóm gồm 2 số tự nhiên liên tiếp) như sau: $(1; 2); (3; 4); \dots; (177; 178)$

Ta chia 100 số phân biệt ở tập A vào 89 nhóm trên, theo nguyên lý Dirichlet, luôn tồn tại ít nhất 1 nhóm chứa cả 2 số trong tập A . Nên 2 số đó là 2 số tự nhiên liên tiếp trong tập A (điều phải chứng minh).

- 2.