

Bài I (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2$.
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x \end{cases}$.

Bài II (2,0 điểm)

- 1) Chứng minh với mỗi số nguyên n , số $n^2 + 3n + 16$ không chia hết cho 25.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 5 = 0$.

Bài III (2,0 điểm)

- 1) Cho a, b và c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh

$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} = -1.$$

- 2) Cho biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{1+2bc}} + \frac{b}{\sqrt{1+2ca}} + \frac{c}{\sqrt{1+2ab}}$ với a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi D, E và F lần lượt là các hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC, CA và AB .

- 1) Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.
- 2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh P, M và D là ba điểm thẳng hàng.
- 3) Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF . Chứng minh HD song song với AM .

Bài V (1,0 điểm)

Trên bàn có n viên kẹo. Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Hai bạn luân phiên lấy kẹo trên bàn, mỗi lần chỉ được lấy 1, 2, 3, 4 hoặc 5 viên kẹo và phải lấy số viên kẹo khác với số viên kẹo của bạn còn lại vừa lấy ngay trước đó. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước,

- 1) Với $n = 7$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của Bình khiến An là người thua cuộc.
- 2) Với $n = 22$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An khiến Bình là người thua cuộc.

..... Hết

Lời giải chi tiết đề thi chuyên Toán - Tin TP. Hà Nội

Nguyễn Khang - Nguyễn Văn Hoàng - Đoàn Phương Khang

1 Câu I

1) Giải phương trình $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x \end{cases}$$

Lời giải.

1) Điều kiện xác định $4+2x-x^2 \geq 0$. Do $VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. Bình phương hai vế, phương trình tương đương với

$$4+2x-x^2 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4+2x-x^2 = x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow x=0(l) \text{ hoặc } x=3(n)$$

2) Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới thu được

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3(y-x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[(x^2+xy+y^2)+3] = 0.$$

Dễ thấy biểu thức trong ngoặc vuông vô nghiệm. Do đó $x=y$. Thay vào phương trình (2), ta có:

$$y^3+2=3y \Leftrightarrow (y+2)(y-1)^2=0.$$

Từ đó $x=y=1$ hoặc $x=y=-2$. Kết luận $(x,y) = (1,1); (-2,-2)$.

2 Câu II

- 1) Chứng minh với mỗi số nguyên n , số $n^2 + 3n + 16$ không chia hết cho 25.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 5 = 0$

Lời giải.

1) Đặt $A = n^2 + 3n + 16 = (n^2 + 3n - 4) + 20 = (n + 4)(n - 1) + 20$

Giả sử A chia hết cho 25 $\Rightarrow$ A chia hết cho 5, mà 20 chia hết cho 5
 $\Rightarrow (n + 4)(n - 1) : 5 \Rightarrow n + 4 : 5$ hoặc $n - 1 : 5$ (do 5 là số nguyên tố)

Mà $(n + 4) - (n - 1) = 5 : 5$

$\Rightarrow n + 4 : 5$ và $n - 1 : 5 \Rightarrow (n + 4)(n - 1) : 25$. Mà $A : 25$

$\Rightarrow 20 : 25$ (vô lý)

Vậy A không chia hết cho 25.

2) Ta có :

$$x^2 - xy - 2y^2 + x + y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) + (x + y) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y + 1) = 5$$

Mà $x + y, x - 2y + 1 \in \mathbb{Z}$ suy ra các trường hợp.

• *Trường hợp 1:*

$$x + y = 5; x - 2y + 1 = 1 \Leftrightarrow x + y = 5; x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}; y = \frac{5}{3} \text{ (loại)}$$

• *Trường hợp 2:*

$$x + y = 1; x - 2y + 1 = 5 \Leftrightarrow x + y = 1; x - 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2; y = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

• *Trường hợp 3:*

$$x + y = -1; x - 2y + 1 = -5 \Leftrightarrow x + y = -1; x - 2y = -6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{3}; y = \frac{5}{3} \text{ (loại)}$$

- Trường hợp 4:

$$x + y = -5; x - 2y + 1 = -1 \Leftrightarrow x + y = -5; x - 2y = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -4; y = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2; -1), (-4; -1)\}.$$

3 Câu III

- 1) Cho a, b và c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} = -1.$$

- 2) Cho biểu thức

$$P = \frac{a}{\sqrt{1+2bc}} + \frac{b}{\sqrt{1+2ca}} + \frac{c}{\sqrt{1+2ab}}$$

với a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Lời giải.

- 1) Để cho tiện, ta ký hiệu $\sum_{cyc} f(a, b, c) = f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b)$. Gọi biểu thức bên vế trái là P . Ta có

$$P = \frac{\sum_{cyc} (c-a)(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{A}{B}$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sum_{cyc} (c-a)(a+b)(b+c) = \sum_{cyc} [ac^2 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c - ab^2] \\ &= a^2b - a^2c - ab^2 + ac^2 + b^2c - bc^2 \\ &= ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\ &= ab(a-b) - bc(a-b) + ca(c-a) - bc(c-a) \\ &= (a-b)b(a-c) - c(a-c)(a-b) \\ &= (a-b)(b-c)(a-c). \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } P = \frac{A}{B} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1.$$

2) Để ý:

$$1 + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b + c)^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{2}.$$

Do đó

$$VT = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b + c)^2}} \leq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{2}a}{a + b + c} = \sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0$ và các hoán vị.

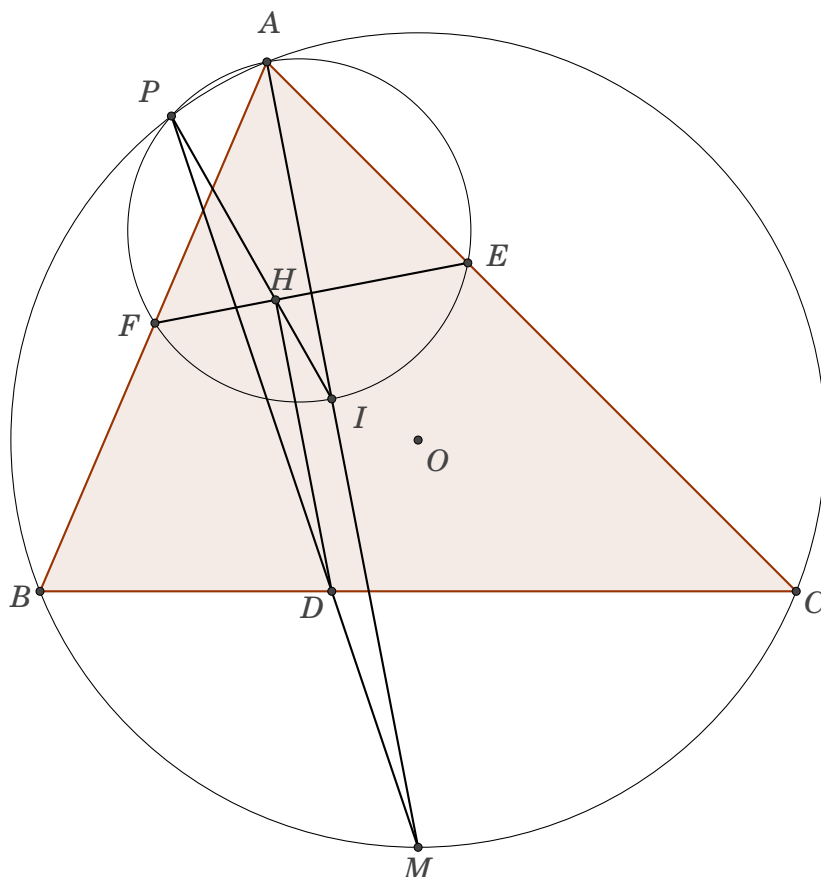
Nhận xét. Thực ra ở câu III.1, nếu ta cộng 1 vào từng phân số ở vế trái rồi biến đổi thì sẽ đơn giản hơn. Nhưng đôi khi cách “trâu” cũng tốt.

4 Câu IV

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi D, E và F lần lượt là các hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC, CA và AB .

- 1) Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.
- 2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh P, M và D là 3 điểm thẳng hàng.
- 3) Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF . Chứng minh HD song song với AM .

Lời giải:



1) Ta có:

$$\begin{aligned}\angle MIB &= \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} \\ \angle MBI &= \angle MBC + \angle IBC = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}\end{aligned}$$

Do đó, ta có $\angle MIB = \angle MBI \Leftrightarrow \triangle MIB$ cân tại M.

2) Có: $\angle PFA = \angle PEA$ (cùng chắn cung PA của (AEF)) $\Rightarrow \angle PFB = \angle PEC$.

Xét tam giác PBF và tam giác PCE có:

$$\begin{cases} \angle PBF = \angle PCE \text{ (cùng chắn cung PA của đường tròn (O)).} \\ \angle PFB = \angle PEC \text{ (chứng minh trên).} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \triangle PBF &\approx \triangle PCE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PF}{PE} = \frac{PB}{PC} = \frac{BF}{CE} \text{ (1) và } \angle FPB = \angle EPC \\ \Rightarrow \angle FPB + \angle FPC &= \angle EPC + \angle FPC \Rightarrow \angle BPC = \angle FPE\end{aligned}$$

Xét tam giác PFE và tam giác PBC:

$$\begin{cases} \angle FPE = \angle BPC \\ \frac{PF}{PE} = \frac{PB}{PC} \end{cases}$$

Vậy $\triangle PFE \sim \triangle PBC$ (c.g.c).

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D, E, F là hình chiếu của I lên BC, CA, AB nên $BD = BF; AF = AE; CE = CD$.

Do đó, ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{PB}{PC}$ (do (1))

Theo định lí về đường phân giác đảo $\Rightarrow PD$ là phân giác góc BPC (2).

Do AM là phân giác góc BAC nên M là trung điểm cung BC nhỏ.

$\Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC} \Rightarrow PM$ là phân giác góc BPC (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow P, M, D$ là 3 điểm thẳng hàng.

3) Vì E, F là hình chiếu của I lên CA, AB nên $\angle IEA = \angle IFA = 90^\circ \Rightarrow A, F, E, I$ cùng thuộc đường tròn đường kính AI , do đó I thuộc (AEF) .

Vì $IE = IF$ nên I là trung điểm cung EF của $(AEF) \Rightarrow PI$ là phân giác góc FPE .

Xét tam giác PFH và tam giác PBD :

$$\begin{cases} \angle HPF = \frac{1}{2} \cdot \angle FPE = \frac{1}{2} \cdot \angle BPC = \angle DPB \\ \angle PFH = \angle PBD \end{cases}$$

Vậy $\triangle PFH \sim \triangle PBD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PH}{PD} = \frac{PF}{PB}$ (*).

Xét tam giác PFI và tam giác PBM :

$$\angle PIF = \angle PEF = \angle PCB = \angle PMB$$

$$\begin{aligned} \angle PFI &= \angle PFE + \angle IFE = \angle PBC + \frac{1}{2} \cdot \angle FPE = \angle PBC + \frac{1}{2} \cdot \angle BPC \\ &= \angle PBC + \angle MBC = \angle PBM \end{aligned}$$

Vậy $\triangle PFI \sim \triangle PBM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PI}{PM} = \frac{PF}{PB}$ (**).

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \frac{PI}{PM} = \frac{PH}{PD} \Rightarrow DH \parallel IM$ (theo định lí Thales đảo).

Vậy $DH \parallel AM$.

5 Câu V

Trên bàn có n viên kẹo. Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Hai bạn luân phiên lấy kẹo trên bàn, mỗi lần chỉ được lấy 1, 2, 3, 4 hoặc 5 viên kẹo và phải lấy số viên kẹo khác với số viên kẹo của bạn còn lại vừa lấy ngay

trước đó. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước,

- 1) Với $n = 7$, hãy chỉ ra chiến thuật của Bình khiến An là người thua cuộc.
- 2) Với $n = 22$, hãy chỉ ra chiến thuật của An khiến Bình là người thua cuộc.

Lời giải:

- 1) Gọi số kẹo An bốc lần đầu là $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

- *Trường hợp 1:* Nếu $2 \leq x \leq 5$.

Dễ thấy $x \neq 7 - x$; $2 \leq 7 - x \leq 5$ nên Bình chỉ cần bốc $7 - x$ viên kẹo, thì sẽ hết số kẹo trên bàn, dẫn đến An thua ở lượt tiếp theo.

- *Trường hợp 2:* $x = 1$

Khi này Bình sẽ bốc 3 viên kẹo, số kẹo trên bàn còn 3 viên.

Khi đó, An không thể bốc được 3 viên, chỉ bốc được 1 (hoặc 2) viên kẹo; Bình lượt tiếp theo sẽ bốc ngược lại của An: 2 (hoặc 1) viên kẹo để trên bàn không còn viên nào nữa. Và An sẽ thua ở lượt tiếp theo.

- 2) Lượt đầu tiên, An bốc 3 viên, số kẹo còn lại trên bàn là 19 viên. Đến lượt Bình, gọi số kẹo Bình bốc là $y \in \{1; 2; 4; 5\}$ (y khác 3 vì An đã bốc 3 viên lần trước rồi). An sẽ bốc số viên kẹo là $6 - y \in \{1; 2; 4; 5\}$ ($6 - y \neq y$), để đảm bảo số kẹo trên bàn còn 13 viên. Lượt tiếp theo của Bình, gọi số kẹo bình bốc là $z \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$

- *Trường hợp 1:* $z \in \{1; 2; 4; 5\}$

An sẽ bốc $6 - z \in \{1; 2; 4; 5\}$ ($6 - z \neq z$), để trên bàn còn 7 viên kẹo. Ta đưa về bài toán tương tự phần a, dễ chỉ ra được cách để An thắng, Bình thua.

- *Trường hợp 2:* $z = 3$.

An sẽ bốc 5 viên kẹo, để trên bàn còn đúng 5 viên.

Tới lúc này, Bình không thể bốc được 5 viên nữa, chỉ có thể bốc 1, 2, 3 hoặc 4 viên;

Dễ thấy, tổng số kẹo ban nãy là 5 (là số lẻ), nên số viên Bình bốc và số viên còn lại sau đó luôn khác nhau. Nên An sẽ bốc hết số viên còn lại trên bàn và Bình sẽ trở thành người thua cuộc vào lượt tiếp theo.