

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2023
Môn thi: TOÁN

(Dùng riêng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin học)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,5 điểm)

- a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.
b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

Bài 2. (3,0 điểm)

- a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức:

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

- b) Tìm các số nguyên dương a và b sao cho $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$ là số hữu tỉ.

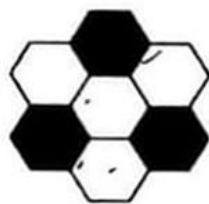
Bài 3. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G . Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N . Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P . Chứng minh:

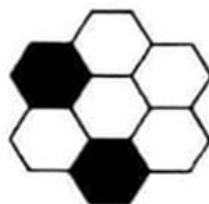
- a) EG song song với MN .
b) Điểm P thuộc đường tròn (I) .

Bài 4. (1,0 điểm)

Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.



Hình 1



Hình 2

Bài 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n .

-----Hết-----

Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên vòng 2 chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội năm 2023

NGUYỄN TIỀN LÂM — NGUYỄN NHẬT HUY

NGÀY 1 THÁNG 6 NĂM 2023

Câu 1

- ① Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.
- ② Tìm các cặp số nguyên (x, y) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

Lời giải.

- ① Gọi 4 số nguyên liên tiếp bất kỳ là $a, a + 1, a + 2, a + 3$ với $a \in \mathbb{Z}$. Ta có các biến đổi sau

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 &= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1 \\ &= (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) + 1 \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2. \end{aligned}$$

Vì $(a^2 + 3a + 1)^2$ là một số chính phương nên bài toán được chứng minh.

- ② Bằng các phép biến đổi ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y - 1) = 10 \\ (x + 1)(y + 1) = 12. \end{cases} \quad (1)$$

Vì x, y nguyên nên $x, 2y - 1$ nguyên do đó $2y - 1$ là ước lẻ của 10. Ta xét các trường hợp sau.

- $2y - 1 = 1$ suy ra $y = 1$ và $x = 10$ thay vào (1) không thỏa mãn.
- $2y - 1 = -1$ suy ra $y = 0$ và $x = -10$ thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn.
- $2y - 1 = 5$ suy ra $y = 3$ và $x = 2$ thay vào (1) ta thấy thỏa mãn.
- $2y - 1 = -5$ suy ra $y = -2$ và $x = -2$ thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn duy nhất là $(x, y) = (2, 3)$.



Câu 1a) là một câu quen thuộc mang tính chất cho điểm cho các thí sinh thi vòng 2.



Câu 2

a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức

$$\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}}$$

là số hữu tỷ.

Lời giải.

a) Bằng các phép biến đổi biểu thức kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c} &\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{a+b-c} \\ &\Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = a + b + 2\sqrt{c(a+b-c)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{c(a+b-c)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ (a+b-c) = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}.$$

Ta biến đổi tương đương đẳng thức này kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{a+b-c} \\ &\Leftrightarrow a + b + 3\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = a + b + 3\left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = \left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right) \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng với điều kiện (*) nên đẳng thức đầu đúng.

Bài toán được chứng minh.

b) Lấy $\alpha \in \mathbb{Q}$ sao cho

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}} = \alpha.$$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sqrt{a} - \alpha\sqrt{b} = \alpha\sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Bình phương 2 vế ta có

$$a + \alpha^2b - 2\alpha\sqrt{ab} = 5\alpha^2 + 3 - 2\alpha\sqrt{15}.$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{ab} - \sqrt{15} = \beta \in \mathbb{Q}.$$

Bình phương 2 vế đẳng thức $\sqrt{ab} = \sqrt{15} + \beta$ ta được

$$ab = 15 + \beta^2 + 2\beta\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\beta\sqrt{15} = ab - 15 - \beta^2.$$

Đẳng thức cuối xảy ra khi và chỉ khi $\beta = 0$; tức là $ab = 15$.
Xét tất cả khả năng có thể xảy ra, ta được.

- $a = 1, b = 15$, tức là $\alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{5} + \sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- $a = 3, b = 5$, tức là $\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- $a = 5, b = 3$, tức là $\alpha = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = 1$ là 1 số hữu tỷ.
- $a = 15, b = 1$, tức là $\alpha = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{3}$, 1 số vô tỷ.

Vậy tất cả các cặp (a, b) thỏa mãn là $a = 5, b = 3$.



Các bạn có thể tham khảo bài toán gốc của câu 2b) như sau.
Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}$$

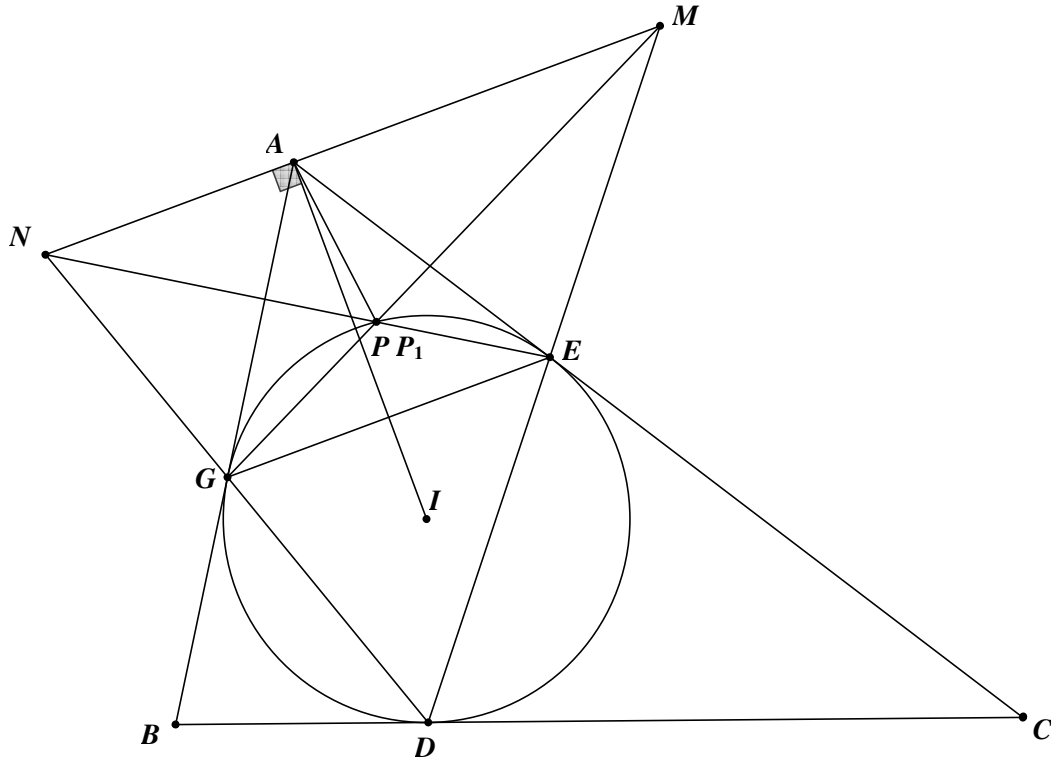
là số hữu tỷ.

Romanian Mathematical Olympiad 2002 – 2003

Câu 3 Cho tam giác ABC . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, F . Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P . Chứng minh rằng:

- EG song song với MN .
- Điểm P thuộc đường tròn (I) .

Lời giải.



- Vì AM là phân giác ngoài $\widehat{BAC}$, AI là phân giác trong góc A nên $AI \perp AM$ mà $GE \perp AI$ nên $EG \parallel AM$ hay $GE \parallel MN$. Bài toán được chứng minh.
- Gọi P_1 là giao của NE và đường tròn (I) thì từ $EG \parallel MN$, ta có

$$\widehat{ANP_1} = \widehat{ANE} = \widehat{P_1EG} = \widehat{P_1GA}$$

Do đó tứ giác $ANGP_1$ nội tiếp kết hợp với tứ giác DGP_1E nội tiếp, ta có

$$\widehat{P_1EM} = \widehat{P_1GD} = \widehat{NAP_1} = 180^\circ - \widehat{P_1AM}$$

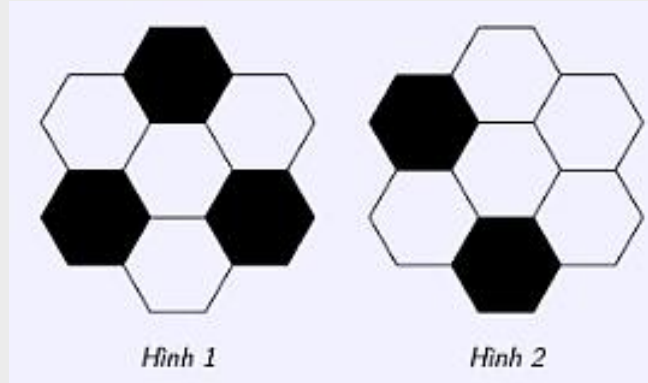
Suy ra tứ giác MAP_1E nội tiếp kết hợp với $EG \parallel MN$ và tứ giác $ANGP_1$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{GP_1M} = \widehat{AP_1M} + \widehat{AP_1G} = \widehat{AEM} + \widehat{AP_1G} = \widehat{DGE} + \widehat{AP_1G} = \widehat{GNA} + \widehat{AP_1G} = 180^\circ.$$

Do đó ta được 3 điểm G, P_1, M thẳng hàng. Vì vậy nên P_1 trùng P . Nói cách khác MG, NE cắt nhau tại 1 điểm P nằm trên (I) . Bài toán được chứng minh.

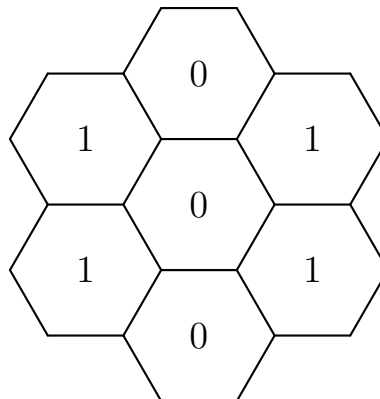


Câu 4 Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen và đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được ô màu như ở Hình 2.



Lời giải.

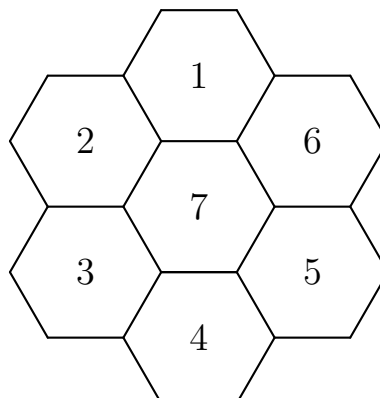
Cách 1. Đánh số vào các hình lục giác như hình vẽ.



Ta xét một hình lục giác được điền số a_i thì $a_i \equiv b_i \pmod{2}$ trong đó b_i là tổng các số được điền trong các hình lục giác chung cạnh với hình lục giác đang xét. Do đó, khi đổi màu theo đề bài thì số dư trong phép chia cho 2 của tổng các số trong các hình lục giác tô đen luôn không đổi.

Đối với hình 1 thì số dư này bằng 1, còn đối với hình 2 thì số dư này bằng 0 nên không thể có cách đổi màu nào biến hình 1 thành hình 2.

Cách 2.



LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI – VÒNG 2

Xét các ô 2, 3, 5, 6. Mỗi bước ta đổi màu hai hoặc cả bốn ô đó nên số ô đen không thay đổi tính chẵn, lẻ. Ban đầu trong bốn ô nói trên có hai ô đen nên không thể có trạng thái trong bốn ô đó có đúng một ô đen. 

Câu 5 Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n .

Lời giải. Xét một số nguyên tố $p > 10^{2023}$ và gọi $p_1, \dots, p_k$ là tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p ($p_1 < p_2 < \dots < p_k$). Xét hai khả năng

○ Nếu $\gcd(p_1 + p_2 + \dots + p_k, p) = 1$ thì chọn $n = p$ ta có điều phải chứng minh.

○ Nếu $p \mid p_1 + p_2 + \dots + p_k$ thì ta viết $kp = p_1 + \dots + p_k < \frac{p(p+1)}{2}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $k < \frac{p+1}{2}$. Chọn q là số nguyên tố nhỏ nhất lớn hơn p tức là p, q là hai số nguyên tố liên tiếp. Thế thì tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn q là

$$S = p_1 + p_2 + \dots + p_k + p = p(k+1).$$

Chú ý là $k+1 < \frac{p+1}{2} + 1 = \frac{p+3}{2} < q$ nên q nguyên tố cùng nhau với $p, k+1$ và do đó $(q, S) = 1$. Chọn $n = q$ ta có ngay điều phải chứng minh.

▽